TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut TTI, FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
PD Dr. rer. nat. habil. K.-H. Niggl

Wiederholungsklausur zu „Automaten und Formale Sprachen“

21. Februar 2003

NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein.

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

abgegeben: **2 Aufgabenblätter**
... **eigene Blätter**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Ges.
erreichbare Punktzahl	30	12	12	12	12	12	10	100
erreichte Punktzahl								

Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Aufgabe 1 (Fragenkatalog) [30 Punkte]

Kreuzen Sie für jede der folgenden 30 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ an.
Bewertung: Ist C die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl P der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C-10\}$. Insbesondere: Kein Kreuz, kein Punkt.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Sind L_1, L_2 reguläre Sprachen, so auch $L_1 \setminus L_2$ und $(L_1^* \cup L_2 L_2) \cap (L_1 L_2)$.
[ ] [ ] Wenn für jede rechtslineare Grammatik G gilt $L(G) \neq L^* \setminus LLL$, dann ist L keine reguläre Sprache.
[ ] [ ] Sind $M_i = (Q_i, \ldots)$, $i = 1, 2$ zwei **DFA**, so hat jeder **DFA** M mit $L_M = L_{M_1} \cap L_{M_2}$ mindestens $|Q_1| \cdot |Q_2| + 1$ Zustände.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für $m \in \mathbb{N}$ und $L := \{u0v \in \{0,1\}^* \mid |v| = m\}$ korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] L ist eine reguläre Sprache.
[ ] [ ] Es gibt einen **NFA** M mit $m+2$ Zuständen und $L_M = L$.
[ ] [ ] Jeder **DFA** M mit $L_M = L$ hat mindestens 2^{m+1} Zustände.

(c) Welche der folgenden Sprachen ist/sind regulär?

JA NEIN
[ ] [ ] $\{\mathrm{a}^n \mid n \,\mathrm{MOD}\, 8 = 3 \text{ oder } n = 2^{100}\}$
[ ] [ ] $\{r \mid r \text{ ist regulärer Ausdruck über } \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}\}$
[ ] [ ] $\{\mathrm{a}^n \mathrm{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede rechtslineare** Grammatik $G=(V,\ldots)$ korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn G keine ε-Produktionen besitzt, dann gilt $L(G)=\emptyset$.
[ ] [ ] Für jeden regulären Ausdruck r gilt $L(r) \neq L(G)\setminus\{\varepsilon\}$.
[ ] [ ] Es gibt einen minimalen DFA $M=(Q,\ldots)$ mit $L_M=L(G)$ und $|Q| \leq 2^{|V|}$.

(e) Um zu zeigen, daß eine Sprache L **regulär** ist, genügt es...

JA NEIN
[ ] [ ] zu zeigen, daß L endlich ist.
[ ] [ ] eine linkslineare Grammatik G' mit $L(G')=L$ anzugeben.
[ ] [ ] einen ε-NFA M mit $L_M=L$ anzugeben.

(f) Sei M ein DFA M ohne überflüssige Zustände. Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Mit Hilfe des Markierungsalgorithmus kann man die Zustandsmenge des zu M äquivalenten minimalen DFA ermitteln.
[ ] [ ] Mit Hilfe des Markierungsalgorithmus kann man alle Zustandspaare (p,q) mit $p \sim_M q$ ermitteln.
[ ] [ ] Der Markierungsalgorithmus markiert in Runde $i \geq 1$ jedes unmarkierte Paar (q,q'), für das ein markiertes Paar $(\delta(q,\mathrm{a}),\delta(q',\mathrm{a}))$ mit $\delta(q,\mathrm{a}) \sim_M \delta(q',\mathrm{a})$ existiert.

(g) Betrachten Sie die Grammatik $G:=(\{A,B,C\},\{\mathrm{b},\mathrm{c}\},A,\{A\to\varepsilon \mid \mathrm{b}B,\ B\to\mathrm{b}B \mid \mathrm{c}C,\ C\to\mathrm{c}C \mid A\}$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] G ist eine rechtslineare Grammatik.
[ ] [ ] G ist eine kontextsensitive Grammatik.
[ ] [ ] $L(G)$ ist eine reguläre Sprache.

(h) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede kontextfreie** Grammatik G korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] $L(G)$ ist kontextsensitiv.
[ ] [ ] Wenn $X \Rightarrow_G^* \alpha$, dann existiert ein X-Ableitungsbaum T in G mit $\alpha(T)=\alpha$.
[ ] [ ] Es gibt eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G')=L(G)$.
[ ] [ ] Es gibt einen Algorithmus, der für ein Wort w entscheidet, ob $w \in L(G)$ gilt.
[ ] [ ] Wenn keine Linksableitung $S \Rightarrow_G^* w$ existiert, dann gilt $w \notin L(G)$.
[ ] [ ] $L(G)$ wird von einem Kellerautomaten akzeptiert.

(i) Welche der folgenden Sprachen (Σ Alphabet, $\# \notin \Sigma$) wird von einem Kellerautomaten akzeptiert?

JA NEIN
[ ] [ ] $\{w_1\#\ldots\#w_l\#w \mid l \geq 1, w_1,\ldots,w_l \in \Sigma^*, w^R \in \{w_1,\ldots,w_l\}\}$
[ ] [ ] $\{w_1\#\ldots\#w_l\#w \mid l \geq 1, w_1,\ldots,w_l \in \Sigma^*, w \in \{w_1,\ldots,w_l\}\}$
[ ] [ ] $\{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n\mathrm{c}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 2 (Definitionen) [12 Punkte]

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Definieren Sie die Sprachen LL und L^*.

(b) Sei $M = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ ein **NFA**, $q \in Q$ und $\mathrm{a}_1 \dots \mathrm{a}_l \in \Sigma^*$. Definieren Sie $\hat{\delta}(q, \mathrm{a}_1 \dots \mathrm{a}_l)$.

(c) Definieren Sie rekursiv die Abbildung $L\colon \mathsf{RA}_\Sigma \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$, die jedem regulären Ausdruck r über Σ die *durch r beschriebene reguläre Sprache $L(r)$* zuordnet.

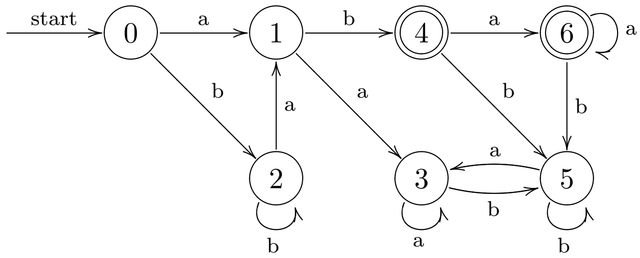
(d) Sei $M = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ ein DFA. Definieren Sie den Begriff $q \sim_M q'$, d.h. *q und q' sind äquivalente Zustände.*

(e) Sei $G = (V, \Sigma, S, P)$ eine Grammatik. Definieren Sie den Begriff $\alpha \Rightarrow_G \alpha'$, d.h. *$\alpha'$ ist aus α in einem Schritt in G ableitbar.*

(f) Definieren Sie den Begriff *G ist kontextsensitive Grammatik.*

Aufgabe 3 (Minimierung) [12 Punkte]

Betrachten Sie den folgenden DFA $M = (\{0, 1, \dots, 6\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, 0, \{4, 6\}, \delta)$ in graphischer Darstellung:



(a) Bestimmen Sie unter Verwendung des **Markierungsalgorithmus** die Äquivalenzklassen in Q bezüglich $\sim_M$.

Kennzeichnen Sie ein **in Runde i zu markierendes Paar** (q, q') dadurch, daß Sie in das betreffende Kästchen der rechtsstehenden Tabelle die Nummer i der Runde eintragen.

1						
2						
3						
4						
5						
6						
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

(b) Bestimmen Sie den **Minimalautomaten** $\tilde{M} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{q}_0, \tilde{F}, \tilde{\delta})$ für L_M und geben Sie $\tilde{M}$ in graphischer Darstellung an.

Aufgabe 4 (Reguläre Ausdrücke, ε-NFA, rechtslineare Grammatik) [12 Punkte]

Betrachten Sie den regulären Ausdruck $r := (\mathrm{a} + \mathrm{b} + \varepsilon)^*(\mathrm{aa} + \mathrm{bb})(\emptyset + \mathrm{b})$.

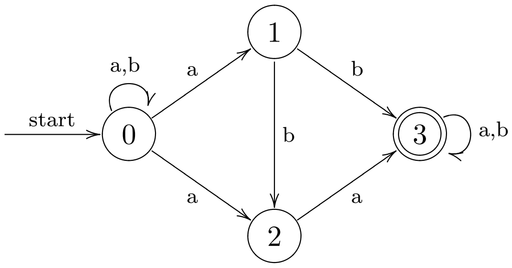
(a) Konstruieren Sie **unter Verwendung des Verfahrens aus der Vorlesung** (Keine ε-Kanten weglassen!) einen **ε-NFA** M in graphischer Darstellung mit $L_M = L(r)$.

(b) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik $G = (V, \Sigma, S, \delta)$ mit $L(G) = L(r)$ an.

Aufgabe 5 (DFA aus NFA konstruieren) [12 Punkte]

(a) Sei $M = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ ein **NFA**. Formulieren Sie die *Potenzmengenkonstruktion* zur Definition eines zu M äquivalenten **DFA** $M' = (Q', \Sigma, q_0', F', \delta')$ durch Angabe von Q', q_0', F', δ'.

(b) Betrachten Sie den folgenden **NFA** $M = (\{0,1,2,3\}, \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}, 0, \{3\}, \delta)$ in graphischer Darstellung:



Konstruieren Sie **unter Verwendung des Verfahrens aus der Vorlesung** einen zu M äquivalenten **DFA** $M' = (Q', \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}, q_0', F', \delta')$ mit $|Q'| < 2^4$. Geben Sie dabei δ' als Tabelle an.

(c) Vereinfachen Sie (durch Betrachten von $G_{M'}$) den in (b) gewonnenen DFA zu einem äquivalenten DFA mit 3 Zuständen.

Aufgabe 6 (Nachweis der Nicht-Kontextfreiheit von Sprachen) [12 Punkte]

Beweisen Sie, daß die nachfolgende Sprache L nicht kontextfrei ist.

$$L := \{\mathrm{a}^m \mathrm{b}^{m+n} \mathrm{c}^n \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m > n\}$$

Aufgabe 7 (Kontextfreie Grammatik konstruieren, Induktion über den Aufbau) [10 Punkte]

Für beliebige, aber fest gewählte Boolesche Variablen $X_0, \ldots, X_l$ sei die Menge **BPT** der ***Booleschen Parsebäume*** (über $X_0, \ldots, X_l$) induktiv wie folgt definiert:

(B) $X_0, \ldots, X_l$ sind Boolesche Parsebäume.
(R1) Ist T ein Boolescher Parsebaum, so auch $(\neg, T)$.
(R2) Sind T_1, T_2 Boolesche Parsebäume, so auch $(\wedge, T_1, T_2)$ und $(\vee, T_1, T_2)$.
(A) Nur die gemäß (B), (R1), (R2) erzeugbaren Objekte sind Boolesche Parsebäume.

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, S, P)$ mit $L(G) = \mathbf{BPT}$ an.

(b) Zeigen Sie für Ihre Grammatik G durch **Induktion über den Aufbau**: $\mathbf{BPT} \subseteq L(G)$

Viel Erfolg!