TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut TTI, FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. (USA) M. Dietzfelbinger

Klausur „Algorithmentheorie“

31. Januar 2005

NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein.

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

abgegeben: **2 Aufgabenblätter**
... eigene Blätter

Einsichtnahme

Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Ges.
erreichbare Punktzahl	30	12	12	10	12	12	12	100
erreichte Punktzahl								

Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Aufgabe 1 (Fragenkatalog) [30 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 30 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ an.
Bewertung: Ist C die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl P der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C-10\}$. Insbesondere: Kein Kreuz, kein Punkt.

(a) Korrekt oder nicht?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Wenn $L = L_M$ für eine Turingmaschine M, die nicht auf allen Eingaben hält, dann ist L nicht rekursiv.
[ ]	[ ]	Wenn $K \leq L$, dann ist L nicht rekursiv.
[ ]	[ ]	Wenn $L \leq \overline{H}$, dann ist L nicht rekursiv aufzählbar.

(b) Korrekt oder nicht?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Zu jeder TM M gibt es eine Konstante d, so daß $t_M(x) \leq 2^{\lvert x \rvert^d}$ für jedes $x \in \Sigma^*$.
[ ]	[ ]	Zu jeder Turingmaschine M gibt es eine Registermaschine M', die das Ein-/Ausgabeverhalten von M simuliert.
[ ]	[ ]	Für jede Turingmaschine M gilt: Wenn kein Polynom $p(n)$ existiert, so daß $t_M(x) \leq p(\lvert x \rvert)$ für jedes $x \in \Sigma^*$ gilt, dann gilt $L_M \in \mathbf{NP}$.

(c) Korrekt oder nicht?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Wenn L rekursiv ist, dann ist $\Sigma^* - L^*$ rekursiv.
[ ]	[ ]	Wenn L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar sind, dann ist auch $\overline{L_1 \cup L_2}$ rekursiv aufzählbar.
[ ]	[ ]	Wenn L rekursiv aufzählbar ist, dann gibt es eine 1-Band-TM M mit $L = H_M$.

(d) Korrekt oder nicht?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn $L = L(G)$ für eine Chomsky-0-Grammatik G, dann gibt es eine deterministische Turingmaschine M mit $L = L_M$.
[ ] [ ] Es gibt eine Chomsky-0-Grammatik G mit $H = L(G)$.
[ ] [ ] Es gibt eine Chomsky-0-Grammatik G mit $\overline{H} = L(G)$.

(e) An dem Berechnungsbaum $CT(M, x)$ einer nichtdeterministischen TM M zu einem Input x kann man erkennen, ...

JA NEIN
[ ] [ ] ... ob L_M rekursiv ist.
[ ] [ ] ... ob x von M akzeptiert wird oder nicht.
[ ] [ ] ... ob jede Berechnung von M auf x maximal $50 \cdot |x|^2 + 10$ Schritte macht.

(f) Korrekt oder nicht?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn $L \in \mathbf{NP}$ und $L \leq_p L'$, dann ist L' **NP**-vollständig.
[ ] [ ] Wenn $L_{\text{SAT}} \leq L$, dann ist L **NP**-vollständig.
[ ] [ ] Wenn L **NP**-vollständig ist, dann gilt $L_{\text{SAT}} \leq L$.

(g) Korrekt oder nicht?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn M eine $p(n)$-zeitbeschränkte k-Band TM ist, wobei $p(n)$ ein Polynom ist, dann existiert ein Polynom $q(n)$ und eine $q(n)$-zeitbeschränkte 1-Band TM M' mit $f_M = f_{M'}$.
[ ] [ ] Jede Turingmaschine M mit $L_M = L_{\text{Clique}}$ ist nichtdeterministisch.
[ ] [ ] Wenn $L \in \mathbf{P}$, dann ist jede TM M mit $L = L_M$ polynomiell zeitbeschränkt.

(h) Welche(s) der folgenden Probleme ist/sind entscheidbar?

JA NEIN
[ ] [ ] Zu einem gegebenen ASCII-Text P entscheide, ob P ein syntaktisch korrektes C-Programm ist.
[ ] [ ] Zu zwei gegebenen C-Programmen P und P′ entscheide, ob P und P′ das gleiche Ein-/Ausgabeverhalten besitzen.
[ ] [ ] Zu einer (als Programm) gegebenen Registermaschine M entscheide, ob M die Additionsfunktion $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(a_1, a_2) \mapsto a_1 + a_2$, berechnet.

(i) Korrekt oder nicht?

JA NEIN
[ ] [ ] Die Sprache L_{PKP} zum Postschen Korrespondenzproblem ist rekursiv aufzählbar.
[ ] [ ] Die Sprache $\{\langle M \rangle \mid H_M = \Sigma^*\}$ ist rekursiv aufzählbar.
[ ] [ ] Die Sprache L_{TAUT} aller (aussagenlogischen) Tautologien ist rekursiv.

(j) Sind die folgenden Fragen entscheidbar?

JA NEIN
[ ] [ ] Gegeben eine kontextfreie Grammatik G, ist $L(G) \neq \emptyset$?
[ ] [ ] Gegeben kontextfreie Grammatiken G_1, G_2, ist $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$?
[ ] [ ] Gegeben eine kontextfreie Grammatik G, ist $L(G)$ regulär?

<u>Aufgabe 2</u> (Definitionen von Begriffen und Konzepten aus der Vorlesung) [12 Punkte]

(a) Definieren Sie: Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist rekursiv.

(b) Definieren Sie die Haltesprache H und die Diagonalsprache K.

(c) Definieren Sie: $L_1 \leq_p L_2$.

(d) Definieren Sie, wann eine nichtdeterministische TM polynomiell zeitbeschränkt heißt.

(e) Definieren Sie: L ist **NP**-vollständig.

(f) Formulieren Sie die Reduktionsmethode zum Beweis der Behauptung „L ist **NP**-vollständig“.

<u>Aufgabe 3</u> (Sätze aus der Vorlesung) [12 Punkte]

Zeigen Sie:

(a) $\overline{K}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Hinweis: Hier ist einer der beiden Beweise aus der Vorlesung gefragt!

(b) Wenn $\mathbf{P} \cap \mathbf{NPC} \neq \emptyset$, dann gilt $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P}$.

<u>Aufgabe 4</u> (Abschlußeigenschaften von r.a. Sprachen mittels Determinismus) [10 Punkte]

Sei $M = (Q, \Gamma, \{0,1\}^*, B, q_0, F, \delta)$ eine 1-Band-Turingmaschine. Betrachten Sie die Sprache

$$L_{\mathrm{Flip}(M)} := \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists \text{ Zerlegung } w = uv \text{ mit } u \neq \varepsilon \text{ und } \mathtt{flip}(u)v \in L_M\}$$

wobei $\mathtt{flip}(b_0 \dots b_n) := \overline{b_0} \dots \overline{b_n}$ mit $\overline{1} := 0$ und $\overline{0} := 1$.

Beschreiben Sie präzise die Arbeitsweise und Organisation einer **deterministischen** Mehrband-Turingmaschine N mit:

$$L_N = L_{\mathrm{Flip}(M)}$$

<u>Aufgabe 5</u> (Rekursive Aufzählbarkeit und Nichtrekursivität von Sprachen) [12 Punkte]

Zeigen Sie:

(a) $L_{\mathrm{Union}} := \{\langle M \rangle \langle M' \rangle \mid H_M \cup H_{M'} \neq \emptyset\}$ ist rekursiv aufzählbar.

(b) $L_{2005} := \{\langle M \rangle \mid \forall x \in \{1\}^+ \colon |f_M(x)| \leq |x|^{2005}\}$ ist nicht rekursiv.

Aufgabe 6 (Unbeschränkte Reduktionen) [12 Punkte]

Betrachten Sie die folgende Sprache:

$$L_{\text{Prim}} := \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf allen } y \in \{0,1\}^* \text{ mit } |y| \in \text{PRIM}\}$$

Zeigen Sie:

(a) $H \leq L_{\text{Prim}}$

(b) $\overline{H} \leq L_{\text{Prim}}$

(c) Weder L_{Prim} noch $\overline{L_{\text{Prim}}}$ ist rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 7 (Reduktionsmethode für **NP**-vollständige Sprachen) [12 Punkte]

Ein Element der Sprache L_{Konflikt} repräsentiert einen Graphen $G = (V, E)$ mit *Gewichten* $c_1, \ldots, c_m$ für jeden Knoten von G sowie eine *Gewichtsschranke* k, so daß eine in G *unabhängige Menge* $I \subseteq V$, d.h.

$$\forall i, j \in I\colon i \neq j \implies (i,j) \notin E$$

mit *Gesamtgewicht* $m(I) := \sum_{i \in I} c_i \geq k$ existiert.

$$L_{\text{Konflikt}} := \{\langle G\rangle\#\text{bin}(c_1)\#\ldots\#\text{bin}(c_m)\#\text{bin}(k) \mid G \text{ ist ein Graph mit } m \text{ Knoten, der eine unabhängige Menge } I \text{ mit } m(I) \geq k \text{ besitzt}\}$$

Zeigen Sie:

(a) $L_{\text{Konflikt}} \in \mathbf{NP}$

(b) $L \leq_p L_{\text{Konflikt}}$ für eine geeignet gewählte Sprache $L \in \mathbf{NPC}$

(c) $L_{\text{Konflikt}} \in \mathbf{NPC}$

Viel Erfolg!