TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut für Theoretische Informatik
FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Priv.-Doz. Dr. rer. nat. habil. K.-H. Niggl

Klausur „Logische Strukturen“ SS 08

21. Juli 2008

NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein.

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

abgegeben: **2 Aufgabenblätter**
... **eigene Blätter**

Einsichtnahme

Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Ges.
erreichbare Punktzahl	30	12	11	20	10	17	100
erreichte Punktzahl							

Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Aufgabe 1 (Fragenkatalog zur Vorlesung) [30 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 30 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ an.
Bewertung: Ist C die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl P der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C-10\}$. Insbesondere: Kein Kreuz wird als falsche Antwort gewertet.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für alle aussagenlogische Formeln F korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Der (Wahrheits-) Wert von F kann i.a. nur bei Vorliegen einer Belegung der in ihr vorkommenden Variablen bestimmt werden.
[ ] [ ] Der Wert von F unter einer Belegung σ hängt von allen Werten in Bild(σ) ab.
[ ] [ ] Der Wert von F unter σ wird durch die Werte aller Teilformeln unter σ bestimmt.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für aussagenlogische Formeln F korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn $\neg F$ eine Tautologie ist, dann ist F unerfüllbar.
[ ] [ ] Wenn F widerlegbar ist, dann ist $\neg F$ eine Tautologie.
[ ] [ ] Entsteht F' aus F, indem darin ein Vorkommen einer Teilformel durch eine äquivalente Formel ersetzt wird, so ist F' eine logische Folgerung aus F.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Jede aussagenlogische Formel in n Variablen definiert genau ein $f \in \mathcal{B}_n$.
[ ] [ ] Wenn für $f \in \mathcal{B}$ gilt $f \neq g$ für 2^{2^n} n-stellige $g \in \mathcal{B}$, dann gilt $f \notin \mathcal{B}_n$.
[ ] [ ] Ist $\mathcal{C}$ eine Basis für $\mathcal{B}$, so gilt $|\mathcal{C}| \geq 2$.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für eine Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}^-$ korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Sind alle Funktionen in $\mathcal{C}$ linear, so auch jede aus $\mathcal{C}$ explizit definierbare Funktion.
[ ] [ ] Ist $\mathcal{C}$ eine Basis für $\mathcal{B}$, so gilt für alle $f \in \mathcal{C}$: $f(0,\ldots,0) = 0$ oder $f(1,\ldots,1) = 1$.
[ ] [ ] Ist $\mathcal{C}$ eine Basis für $\mathcal{B}$, so existiert eine Basis $B \subseteq \mathcal{C}$ für $\mathcal{B}$ mit $|B| \leq 5$.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede prädikatenlogische Formel** A richtig?

JA NEIN

[ ] [ ] A ist zu einer aussagenlogischen Formel in KNF äquivalent.

[ ] [ ] A ist ein wohlgeformter Ausdruck, aufgebaut aus (Individuen-) Variablen und Prädikatensymbolen mittels der Symbole $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ sowie Klammern (,).

[ ] [ ] Ist A eine Primformel, so besitzt A die Gestalt $p(t_1, \ldots, t_n)$, für ein n-stelliges Prädikatensymbol p und bestimmte Formeln $t_1, \ldots, t_n$.

(f) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede prädikatenlogische Formel** A richtig?

JA NEIN

[ ] [ ] Der (Wahrheits-) Wert von A kann bei Vorliegen einer Trägermenge D sowie einer Interpretation der Prädikaten-/Funktionssymbole (von A) über D bestimmt werden.

[ ] [ ] A ist gültig gdw. $\mathcal{M} \models A\,[\varphi]$ für jede Interpretation $(\mathcal{M}, \varphi)$ für $\mathcal{L}(A)$ gilt.

[ ] [ ] A ist erfüllbar gdw. eine Interpretation $(\mathcal{M}, \varphi)$ mit $\mathcal{M} \models \exists\,\mathrm{FV}(A)\,A\,[\varphi]$ existiert.

(g) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede prädikatenlogische Formel** A richtig?

JA NEIN

[ ] [ ] A kann äquivalent als Formel $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\, B$ mit Quantoren $Q_1, \ldots, Q_n$ und quantorenfreiem Kern B in KNF geschrieben werden.

[ ] [ ] A ist in eine Formel $A' = \forall x_1 \ldots \forall x_m\, B$ mit quantorenfreiem Kern B umformbar, sodaß gilt: A ist unerfüllbar gdw. A' ist unerfüllbar.

[ ] [ ] A ist in eine geschlossene Formel $\forall y_1 \ldots y_n \exists x_1 \ldots \exists x_m\, B$ mit quantorenfreiem Kern B umformbar, sodaß gilt: A ist gültig gdw. $\exists y_1 \ldots y_n \forall x_1 \ldots \forall x_m \neg B$ ist unerfüllbar.

(h) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jedes Axiomensystem** S und **jede geschlossene Formel** A richtig?

JA NEIN

[ ] [ ] Wenn eine annahmenfreie Herleitung von A (im Kalkül des natürlichen Schließens basierend auf klassicher Minimallogik) existiert, dann ist A gültig.

[ ] [ ] Wenn der Suchbaum für ein Gegenbeispiel zu $S \vdash A$ *geschlossen* ist, dann kann man daraus eine Herleitung von A aus Annahmen in S konstruieren. Andernfalls kann man aus jedem Pfad α im Suchbaum, der ein offenes Blatt besitzt oder unendlich ist, eine Termstruktur $\mathcal{M}_\alpha$ mit $\mathcal{M}_\alpha \models S$ und $\mathcal{M}_\alpha \not\models A$ definieren.

[ ] [ ] Wenn $S \models A$ gilt, dann ist der Suchbaum für ein Gegenbeipiel zu $S \vdash A$ *geschlossen*.

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

JA NEIN

[ ] [ ] Wenn ein Axiomensystem S kein abzählbares Modell besitzt, dann existiert eine endliche Teilmenge von S, die kein Modell besitzt.

[ ] [ ] Wenn $\exists \vec{x}\, A$ gültig ist, dann existieren Terme $\vec{t}$ mit $\vdash A[\vec{t}/\vec{x}]$.

[ ] [ ] Wenn $\exists \vec{x}\, A$ gültig und A quantorenfrei ist, dann existieren endlich viele Termtupel $\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_m$ mit $\vdash A[\vec{t}_1/\vec{x}], \ldots, A[\vec{t}_m/\vec{x}] \rightarrow \bot$.

(j) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede Klauselmenge** Γ richtig?

JA NEIN

[ ] [ ] Der Unifikationsalgorithmus von Robinson berechnet für jede unifizierbare Klausel $K \in \Gamma$ in Polynomialzeit einen allgemeinsten Unifikator (MGU).

[ ] [ ] Wenn $\emptyset$ keine Resolutionsherleitung aus Γ besitzt, dann besitzt Γ ein Modell.

[ ] [ ] Wenn $\emptyset$ eine Resolutionsherleitung aus Γ besitzt, dann gilt $\forall\Gamma \vdash \bot$.

Aufgabe 2 (Definitionen von Begriffen aus der Vorlesung) [12=3+2+1+1+2+3 Punkte]

Definieren Sie (für eine Sprache $\mathcal{L}$ erster Stufe und eine Interpretation $(\mathcal{M}, \varphi)$ für $\mathcal{L}$):

(a) $\mathcal{M}$ *ist eine Struktur für* $\mathcal{L}$

(b) $[\![t]\!]_\varphi^\mathcal{M}$ (*Wert eines Terms in* $\mathcal{M}$ *unter* φ)

(c) $\mathcal{M} \models p(t_1, \ldots, t_n)\ [\varphi]$ (*in* $\mathcal{M}$ *gilt die Primformel* $p(t_1, \ldots, t_n)$ *unter* φ)

(d) $\mathcal{M} \models A$ ($\mathcal{M}$ *ist Modell von* A)

(e) $\Gamma \models A$ (A *ist semantische Folgerung aus der Menge* Γ *von Formeln über* $\mathcal{L}$)

(f) d' *ist Herleitung der Formel* $\forall x_1 \ldots x_n\, B$ *mit freien Annahmen* $\mathrm{FA}(d')$ via $\forall$–Einführung

Aufgabe 3 (Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe) [11 Punkte]

Sei $(\mathcal{M}, \varphi)$ eine beliebige Interpretation einer Sprache $\mathcal{L}$ erster Stufe und $A := (\neg p(x) \to \forall x\, \neg p(x))$ eine Formel über $\mathcal{L}$, für ein 1-stelliges Prädikatensymbol p.

Zeigen Sie (sorgfältig und in kleinen Schritten) folgende Aussage:

$$\mathcal{M} \models \exists x A\ [\varphi]$$

Hinweis: Unterscheiden Sie: (1) *Es ex. ein* $a \in D^\mathcal{M}$ *mit* $a \in p^\mathcal{M}$ und (2) *Für alle* $a \in D^\mathcal{M}$ *gilt* $a \notin p^\mathcal{M}$.

Aufgabe 4 (Herleitungen) [20 = 7+7+6 Punkte]

Zeigen Sie durch Angabe einer Herleitung im Kalkül des natürlichen Schließens, basierend auf klassischer Minimallogik, folgende Herleitbarkeitsaussagen:

(a) $\vdash \neg(A \to B) \to A$

Als abgeleitete Regeln dürfen dabei nur (**EFQ**) und (**IB**) verwendet werden.

(b) $\vdash (A[r/x] \vee A[s/x]) \to \exists x\, A$

Gehen Sie dabei von der Definition von $(A[r/x] \vee A[s/x])$ und $\exists x\, A$ im $\to, \forall$-Fragment aus.

(c) $\vdash (\exists x\, A \to B) \to \forall x\, (A \to B)$, falls $x \notin \mathrm{FV}(B)$

Als abgeleitete Regel darf dabei nur die **$\exists$-Einführung** ($\exists^+$) verwendet werden.

Aufgabe 5 (Suchbaum für ein Gegenbeispiel zu $S \vdash A$) [10=9+1 Punkte]

Man betrachte die Formeln $A_1 := p \to q$, $A_2 := \neg q$ und $A := p$, für 0-stellige Prädikatensymbole p, q.

(a) Konstruieren Sie den Suchbaum für ein Gegenbeispiel zu $\{A_1, A_2\} \vdash A$ bzgl. folgender Aufzählung der Teilformeln von A_1, A_2 und A:

$$D_0 := p \to q,\ D_1 := \neg q,\ D_2 := q,\ D_3 := \bot \text{ und } D_4 := p$$

Notieren Sie dabei an den geschlossenen Pfaden den/einen dafür begründenden *Fall* (*1.,2.,3.*).

(b) Interpretieren Sie das Ergebnis Ihres Suchbaums aus (a).

Aufgabe 6 (Aussagenlogische Resolution und Unifikation) [17=9+5.5+2.5 Punkte]

(a) Zeigen Sie mittels aussagenlogischer Resolution (gemäß Verfahren aus der Vorlesung bzw. Übung):

X_1 ist logische Folgerung aus $F := (X_1 \to X_2 \wedge X_3) \wedge (\overline{X_2} \to \overline{X_3}) \wedge (X_2 \to X_1) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee X_3)$

(b) Für ein 2-stelliges Prädikatensymbol p sowie 1-stellige Funktionssymbole f, g und eine Konstante c seien die Mengen M und M' wie folgt definiert:

$$M := \{p(f(c), y),\ p(x, g(x)),\ p(z, g(f(c)))\}$$
$$M' := \{p(x, y),\ p(y, f(x))\}$$

Wenden Sie den Robinsonschen Unifikationsalgorithmus auf beide Mengen an und bestimmen Sie dabei einen MGU im Falle der Unifizierbarkeit.

Viel Erfolg!