TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut TTI, FG Automaten und Formale Sprachen
Prof. Dr. M. Kunde

Klausur Algorithmentheorie SS 04

26. Juli 2004

NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein. Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

abgegeben: **2 Aufgabenblätter**
... eigene Blätter

Einsichtnahme
Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Ges.
erreichbare Punktzahl	30	12	12	12	10	12	12	100
erreichte Punktzahl								

Aufgabe 1

[30 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 10 Fragen entweder „JA" oder „NEIN" in jeder Zeile an. **Bewertung: Ist C die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl P der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C-10\}$. Nichtbeantwortete Fragen werden wie falsche Antworten bewertet.**

(a) Für jede deterministische Turingmaschine M gilt:

JA NEIN
[ ] [ ] L_M ist rekursiv aufzählbar.
[ ] [ ] H_M ist rekursiv aufzählbar.
[ ] [ ] $H_M - L_M$ ist rekursiv aufzählbar.

(b) Um zu beweisen, dass eine Sprache L nicht rekursiv ist, genügt es...

JA NEIN
[ ] [ ] zu zeigen, dass $K \leq L$ gilt.
[ ] [ ] eine Turingmaschine M mit $L = L_M$ anzugeben, die auf allen Eingaben hält.
[ ] [ ] zu zeigen, dass $\overline{H} \leq L$ gilt.

(c) Um zu beweisen, dass eine Sprache L rekursiv ist, genügt es...

JA NEIN
[ ] [ ] eine Turingmaschine M mit $L = L_M$ anzugeben, die auf allen Eingaben hält.
[ ] [ ] zu zeigen, dass $L \leq H$ gilt.
[ ] [ ] zu zeigen, dass $L \leq L'$ für eine rekursive Sprache L gilt.

(d) Stimmen die folgende Aussagen?

JA NEIN
[ ] [ ] $\{L \mid L \text{ ist rekursiv}\} \subseteq \mathsf{P} \cup \mathsf{NP}$
[ ] [ ] $\mathsf{P} \subseteq \{L \mid L \text{ ist rekursiv}\}$
[ ] [ ] $\mathsf{NP} \subseteq \{L \mid L \text{ ist rekursiv}\}$

(e) Gelten die folgenden Aussagen für einen Berechnungsbaum $\mathrm{CT}_M(x)$ einer nichtdeterministischen Turingmaschine M?

JA NEIN
[ ] [ ] Die Wurzel ist stets mit einer akzeptierenden Haltekonfiguration beschriftet.
[ ] [ ] Wenn $\mathrm{CT}_M(x)$ endlich ist, kann man die (nichtdeterministische) Laufzeit von M auf x ablesen.
[ ] [ ] In $\mathrm{CT}_M(x)$ kann man ablesen, ob x verworfen wird.

(f) Sei M eine beliebige RAM mit polynomiell beschränkten logarithmischen Kosten. Dann ...

JA NEIN
[ ] [ ] wird jedes Register $R_0, R_1, \ldots$ von M gelesen.
[ ] [ ] hat M stets polynomielle Laufzeit.
[ ] [ ] lässt sich M auf einer Turingmaschine in polynomieller Laufzeit simulieren.

(g) Das Postsche Korresponenzproblem (PKP)...

JA NEIN
[ ] [ ] ist die Frage, ob es unter den Paaren $(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n) \in (\Sigma^*)^2$ eine Auswahl $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} |u_i| = \sum_{i \in I} |v_i|$ gibt.
[ ] [ ] ist entscheidbar.
[ ] [ ] ist in P.

(h) Stimmen die folgenden Aussagen?

JA NEIN
[ ] [ ] Für jede endliche Sprache L gilt $L \in \mathsf{P}$.
[ ] [ ] $L_{\texttt{INDEPENDENT SET}} \in \mathsf{NP}$
[ ] [ ] Falls $L_{\texttt{VERTEX COVER}} \in \mathsf{P}$, dann gilt $L_{\texttt{CLIQUE}} \in \mathsf{P}$.

(i) Sind die folgenden Sprachen L rekursiv aufzählbar?

JA NEIN
[ ] [ ] $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf den Eingabe 01 und 00}\}$
[ ] [ ] $L = K$
[ ] [ ] $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf unendlich vielen Eingaben}\}$

(j) Sind die folgenden Sprachen L rekursiv?

JA NEIN
[ ] [ ] $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \langle M \rangle\}$
[ ] [ ] $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe 01}\}$
[ ] [ ] $L = \{\langle M \rangle \mid L_M \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$

Aufgabe 2 [12 Punkte]

(a) Definieren Sie: „k ist Konfiguration einer Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, F, \delta)$“!

(b) Definieren Sie: „Die deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, F, \delta)$ hält auf der Eingabe $x \in \Sigma^*$“!

(c) Definieren Sie L_M für eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, F, \delta)$!

(d) Definieren Sie: „Eine Sprache L ist rekursiv aufzählbar“!

(e) Definieren Sie die Haltesprache H!

(f) Definieren Sie: „Die Eigenschaft $\mathcal{E}$ von rekursiv aufzählbaren Sprachen ist nicht trivial“!

Aufgabe 3 [12 Punkte]

Geben Sie alle Komponenten einer Turingmaschine $M = (Q, \Gamma, \{0,1\}, B, q_0, F)$ an, die auf einer Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ genau dann akzeptierend hält, wenn $x = a_0 \ldots a_n a_n \ldots a_0$, $a_i \in \{0,1\}$, gilt. Dabei gilt $\mathrm{init}_M(x) = (q_0, B)x$. Geben Sie dabei δ in geeigneter Form an (Graph oder Tabelle oder Funktionsschreibweise oder...).

Aufgabe 4 [12 Punkte]

Das Problem `PARTITION` ist wie folgt beschrieben: Gegeben sind n Objekte mit den Volumen a_1, ..., a_n. Ist es möglich, eine Auswahl I dieser Objekte zu treffen, so dass die Haufen I und $\overline{I}$ gleich groß sind? Formal erhalten wir:

$$L_{\texttt{PARTITION}} = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \mid \exists I \subseteq \{1, \ldots, n\}\colon \sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \notin I} a_j \right\}$$

Das Problem `3-PARTITION` ist wie folgt beschrieben: Gegeben sind n Objekte mit den Volumen a_1, ..., a_n. Ist es möglich, die Objekte in drei disjunkte Haufen I_1, I_2, I_3, $I_j \cap I_k = \emptyset$, $j \neq k$, aufzuteilen so dass die drei Haufen alle gleich groß sind? Formal erhalten wir:

$$L_{\texttt{3-PARTITION}} = \Bigg\{ (a_1, \ldots, a_n) \mid \exists I_1, I_2, I_3 \subseteq \{1, \ldots, n\}\colon \\ I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, \ldots, n\} \land I_j \cap I_k = \emptyset, j \neq k \land \sum_{i_1 \in I_1} a_{i_1} = \sum_{i_2 \in I_2} a_{i_2} = \sum_{i_3 \in I_3} a_{i_3} \Bigg\}$$

Zeigen Sie: $L_{\texttt{PARTITION}} \leq_{\mathrm{p}} L_{\texttt{3-PARTITION}}$.

Hinweis: *Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktionsfunktion. Sie brauchen aber keine Laufzeitanalyse vorzunehmen.*

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Zeigen Sie: Wenn L und $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L rekursiv!

Aufgabe 6 [12 Punkte]

Beweisen Sie: Wenn eine TM $M = (Q, \Gamma, \Sigma, B, q_0, F, \delta)$ auf Eingabe x höchstens $s_M(x)$ verschiedene Bandzellen besucht, dann macht sie entweder höchstens $O(C^{s_M(x)})$ Schritte für eine geeignete Konstante C oder sie hält nicht.

Aufgabe 7 [12 Punkte]

Sei $H_\varepsilon := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf } \varepsilon\}$. Zeigen Sie: H_ε ist nicht rekursiv aufzählbar.

Viel Erfolg!