TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut TTI, FG Automaten und Formale Sprachen
Prof. Dr. M. Dietzfelbinger

Klausur Algorithmentheorie SS 05

25. Juli 2005

NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein. Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

abgegeben: **2 Aufgabenblätter**
... eigene Blätter

Einsichtnahme

Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Ges.
erreichbare Punktzahl	30	14	10	12	12	12	10	100
erreichte Punktzahl								

Aufgabe 1

[30 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 10 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ in jeder Zeile an. **Bewertung: Ist C die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl P der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C - 10\}$. Nichtbeantwortete Fragen werden wie falsche Antworten bewertet.**

(a) Für jede deterministische Turingmaschine M gilt:

JA NEIN
[ ] [ ] L_M ist rekursiv aufzählbar.
[ ] [ ] H_M ist rekursiv aufzählbar.
[ ] [ ] $H_M - L_M$ ist rekursiv aufzählbar.

(b) Um zu beweisen, dass eine Sprache L nicht rekursiv ist, genügt es ...

JA NEIN
[ ] [ ] zu zeigen, dass $K \leq L$ gilt.
[ ] [ ] eine Turingmaschine M mit $L = L_M$ anzugeben, die nicht auf allen Eingaben hält.
[ ] [ ] zu zeigen, dass $L_{\text{SAT}} \leq_p L$ gilt.

(c) Um zu beweisen, dass eine Sprache L rekursiv ist, genügt es ...

JA NEIN
[ ] [ ] zu zeigen, dass L und $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar sind.
[ ] [ ] zu zeigen, dass $L \leq H$ gilt.
[ ] [ ] zu zeigen, dass $L \leq L'$ für eine rekursive Sprache L' gilt.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede** Turingmaschine M korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Auf jeder Eingabe x besucht M mindestens $\|x\|$ Bandzellen.
[ ]	[ ]	Wenn M auf x hält, so gilt $\|f_M(x)\| \leq \|x\| + t_M(x)$.
[ ]	[ ]	Auf Eingabe x benutzt M höchstens $2 \cdot \|f_M(x)\|$ Bandzellen.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Für jede kontextfreie Grammatik G gilt $L(G) \in \mathsf{P}$.
[ ]	[ ]	Es gibt eine Chomsky-0-Grammatik G derart, dass $L(G)$ nicht rekursiv ist.
[ ]	[ ]	Für jeden Aufzähler N gibt es eine Chomsky-0-Grammatik G mit $L(G) = L_N$.

(f) Bezeichne P beliebige ASCII-Texte. Welches der folgenden Probleme ist entscheidbar?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Zu vorgegebenem P: Ist P ein syntaktisch korrektes Pascal-Programm?
[ ]	[ ]	Zu vorgegebenem P: Ist P ein syntaktisch korrektes Pascal-Programm, das auf Eingabe x die Ausgabe xx erzeugt?
[ ]	[ ]	Zu vorgegebenem P: Ist P ein syntaktisch korrektes Pascal-Programm, das auf allen Eingaben hält?

(g) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für alle Sprachen L korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Wenn $L_{\text{Clique}} \leq_p L$, dann ist L NP-schwer.
[ ]	[ ]	Wenn $L \in \mathsf{NP}$ und $L \leq_p L_{\text{Rucksack}}$, dann ist L NP-vollständig.
[ ]	[ ]	Wenn $L \leq_p L_{\text{SAT}}$, dann ist $L \notin \mathsf{P}$.

(h) Aus dem Berechnungsbaum $\text{CT}_M(x)$ einer nichtdeterministischen Turingmaschine M auf einer Eingabe x kann man ...

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	die (nichtdeterministische) Laufzeit von M auf x ablesen.
[ ]	[ ]	ablesen, ob L_M endlich ist.
[ ]	[ ]	ablesen, ob x von M akzeptiert wird.

(i) Sind die folgenden Sprachen L rekursiv?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist normierte Turingmaschine}\}$.
[ ]	[ ]	$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist normierte Turingmaschine, } f_M \text{ ist partiell rekursiv}\}$.
[ ]	[ ]	$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist normierte Turingmaschine, } H_M \neq \emptyset\}$.

(j) Wenn $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, welche der folgenden Aussagen ist/sind dann korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Die Optimierungsvariante f_{Clique} ist nicht in FP.
[ ]	[ ]	Keine NP-vollständige Sprache ist polynomialzeit-entscheidbar.
[ ]	[ ]	L_{SAT} ist nicht in NP.

Aufgabe 2 (Definitionen und grundlegende Konzepte) [14 Punkte]

Geben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe und Konzepte an beziehungsweise beantworten Sie die folgenden Fragen!

(a) Wie verhält sich eine universelle Turingmaschine U auf einer Eingabe der Form $\langle M\rangle x$ (bzgl. Halten, Akzeptieren, Ausgabe)?
Was passiert, wenn U eine Eingabe y erhält, die nicht von der Form $\langle M\rangle x$ ist?

(b) Definieren Sie H und K!

(c) Definieren Sie: „Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist rekursiv aufzählbar“!

(d) Definieren Sie $L \leq_p L'$ (für $L, L' \subseteq \Sigma^*$)!

(e) Definieren Sie NP!

(f) Formulieren Sie die Reduktionsmethode zum Beweis der Behauptung „L ist NP-vollständig“.

(g) Definieren Sie L_{SAT} und formulieren Sie den Satz von Cook.

Aufgabe 3 (TM-Programmierung) [10 Punkte]

Geben Sie alle Komponenten einer deterministischen Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, F, \delta)$ an, die folgendes leistet: Die Eingabe ist ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{0,1\} \times \{0,1\}$, wobei $w = w_1 \dots w_n$, $w_i = (w_i^0, w_i^1) \in \Sigma$. w wird akzeptiert, falls für alle i gilt: $w_i^0 \leq w_i^1$, und verworfen sonst. Die Ausgabe ist $u_1 \dots u_n$, wo $u_i = \max\{w_i^0, w_i^1\}$.
Geben Sie dabei δ in geeigneter Form an (Graph oder Tabelle oder Funktionsschreibweise oder ...).

Aufgabe 4 (p-Reduktion) [12 Punkte]

Das Problem `PARTITION` ist wie folgt beschrieben: Gegeben sind n Objekte mit den Volumen $a_1, \dots, a_n$. Ist es möglich, eine Auswahl I dieser Objekte zu treffen, so dass die Haufen I und $\overline{I}$ gleich groß sind? Formal erhalten wir:

$$L_{\text{Partition}} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid \exists I \subseteq \{1, \dots, n\} : \sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \notin I} a_j\}$$

Das Problem `RUCKSACK*` ist wie folgt beschrieben: Gegeben sind n Objekte mit den Volumen $a_1, \dots, a_n$ und ein Rucksack mit Volumen b. Ist es möglich, eine Auswahl I dieser Objekte zu treffen, so dass die ausgewählten Elemente den Rucksack exakt füllen? Formal erhalten wir:

$$L_{\text{Rucksack}^*} = \{(a_1, \dots, a_n, b) \mid \exists I \subseteq \{1, \dots, n\} : \sum_{i \in I} a_i = b\}$$

Zeigen Sie:

(a) $L_{\text{Partition}} \in \text{NP}$,

(b) $L_{\text{Partition}} \leq_p L_{\text{Rucksack}^*}$.

Hinweis: *Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktionsfunktion. Sie brauchen aber keine Laufzeitanalyse vorzunehmen.*

Aufgabe 5 (Reduktionen) [12 Punkte]

Betrachten Sie folgende Sprache:

$$L_1 := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf allen } y \in \{0,1\}^*, \text{ die mit 1 beginnen } \}.$$

Zeigen Sie:

(a) $H \leq L_1$,

(b) $\overline{H} \leq L_1$,

(c) Weder L_1 noch $\overline{L_1}$ ist rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 6 (Uhrbeschränkte Berechnung) [12 Punkte]

Sei $L = L_M$ für eine 1-Band-TM M mit Eingabealphabet Σ. Betrachten Sie die folgende Sprache:

$$\text{Vertausche}(L) := \{uv \mid u, v \in \Sigma^*,\ vu \in L\}.$$

Beschreiben Sie die Arbeitsweise einer **deterministischen** Mehrband-TM M' mit

$$L_{M'} = \text{Vertausche}(L).$$

Aufgabe 7 (Satz aus der Vorlesung) [10 Punkte]

Zeigen Sie: Wenn $L \in \mathsf{P}$ und $L' \leq_p L$, dann ist $L' \in \mathsf{P}$.

Begründen Sie sorgfältig, dass die neue Turingmaschine polynomielle Laufzeit hat.

Viel Erfolg!