TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut für Theoretische Informatik
FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Univ.-Prof. Dr. (USA) M. Dietzfelbinger

Klausur Algorithmentheorie SS 06

Matrikel 2004

26. Juli 2006

NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Vornamen, Ihre Studiennummer und Matrikel ein. Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Arbeitszeit 80min

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

abgegeben: **2 Aufgabenblätter**
... eigene Blätter

Einsichtnahme

Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Ges.
erreichbare Punktzahl	18	10	14	8	12	8	70
erreichte Punktzahl							

Aufgabe 1

[18 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „JA“ oder „NEIN“ an.

Bewertung: Ist C die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl P der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C-6\}$. Nichtbeantwortete Fragen werden wie falsche Antworten bewertet.

(a) Sind die Aussagen korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Aus dem Berechnungsbaum $CT(M,x)$ einer nichtdeterministischen Turingmaschine M auf einer Eingabe x kann man ablesen, ob H_M endlich ist.
[ ]	[ ]	Zu zwei gegebenen Java-Programmen P und P' kann man algorithmisch entscheiden, ob P und P' dieselbe Funktion berechnen.

(b) Sind die Aussagen korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Das Äquivalenzproblem für kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 ist entscheidbar.
[ ]	[ ]	Die Sprache L_{PKP} zum Postschen Korrespondenzproblem **PKP** ist rekursiv aufzählbar.

(c) Sind die Aussagen korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	$\{L_M \mid M \text{ ist TM}\} = \{H_M \mid M \text{ ist TM}\}$.
[ ]	[ ]	Eine universelle Turingmaschine U hält auf $y \in \{0,1\}^*$ genau dann wenn y das Format $\langle M \rangle x$ hat.

(d) Sind die Aussagen für jede TM M korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Die Sprache $\{x \in \{0,1\}^* \mid M \text{ verwirft } x\}$ ist rekursiv aufzählbar.
[ ]	[ ]	Die Sprache $\{x \in \{0,1\}^* \mid M \text{ hält nicht auf } x\}$ ist rekursiv aufzählbar.

(e) Für alle Sprachen L gilt:

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Wenn $H \leq L$, dann ist $\overline{L}$ nicht rekursiv aufzählbar.
[ ]	[ ]	Wenn $L \leq K$ und $\overline{L} \leq K$, dann ist L rekursiv.

(f) Sind die Aussagen korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Die Sprache $\{\langle M \rangle \mid H_M = \Sigma^*\}$ ist rekursiv aufzählbar.
[ ]	[ ]	Wenn $L \leq_p L_{\text{Clique}}$, dann ist L NP-vollständig.

(g) Sind die Aussagen korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Wenn L NP-vollständig ist, dann gilt $L_{\text{SAT}} \leq_p L$.
[ ]	[ ]	Wenn $L_{\text{Partition}} \leq_p L$, dann ist L NP-schwer.

(h) Sind die Aussagen korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Es gilt NP $\subseteq \{L \mid L \text{ ist rekursiv}\}$.
[ ]	[ ]	Falls $L_{\text{Subgraph-Iso}} \in$ P, dann gilt $L_{\text{SAT}} \in$ P.

(i) Sind die Aussagen korrekt?

JA	NEIN	
[ ]	[ ]	Es gibt eine Chomsky-0-Grammatik G mit $\overline{H} = L(G)$.
[ ]	[ ]	Für jede kontextsensitive Grammatik G gilt: $L(G)$ ist rekursiv.

Aufgabe 2 (Definitionen und grundlegende Konzepte) [10 Punkte]

Geben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe und Konzepte (wie in der Vorlesung) an beziehungsweise beantworten Sie die folgenden Fragen!

(a) [2 Punkte] Definieren Sie „L ist NP-vollständig“!

(b) [2 Punkte] Definieren Sie „φ ist erfüllbar“ für eine KNF-Formel φ, und definieren Sie L_{SAT}.

(c) [2 Punkte] Definieren Sie H und K.

(d) [2 Punkte] Definieren Sie das Postsche Korrespondenzproblem (PKP) zu $\Sigma = \{0, 1\}$. (Input:..., Frage:....)

(e) [2 Punkte] Definieren Sie „TM M ist $t(n)$-zeitbeschränkt“.

Aufgabe 3 (2:1-Partition) [14 Punkte]

Das Problem 2:1-Partition ist wie folgt beschrieben: Gegeben sind n Objekte mit den Volumina a_1, ..., a_n. Ist es möglich, eine Auswahl I dieser Objekte zu treffen, so dass die Summe der Volumina a_i mit $i \in I$ genau doppelt so groß ist wie die des Restes? Formal:

$$L_{2:1-\mathrm{Partition}} = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \mid \exists I \subseteq \{1, \ldots, n\} \colon \sum_{i \in I} a_i = 2 \cdot \sum_{j \notin I} a_j \right\}$$

(a) [7 Punkte] Beweisen Sie: $L_{2:1-\mathrm{Partition}}$ ist in NP.

(b) [7 Punkte] Zeigen Sie:

$f : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (2 \cdot a_1, \ldots, 2 \cdot a_n, 2 \cdot s, 5 \cdot s)$ mit $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ist Reduktionsfunktion für $L_{\mathrm{Partition}} \leq_p L_{2:1-\mathrm{Partition}}$.

Formulieren Sie hierzu die Eigenschaft, die f als Reduktionsfunktion haben muss und beweisen Sie sie.

Hinweis: *Beweisen Sie: „ $\Longrightarrow$ “ und „ $\Longleftarrow$ “ separat.*
Der Zeitaufwand für die Berechnung von f braucht nicht diskutiert zu werden.

Aufgabe 4 (Abschlusseigenschaften von r.a. Sprachen mittels Determinismus) [8 Punkte]

Sei $L = L_M$ für eine 1-Band-TM $M := (Q, \Gamma, \{0, 1\}, B, q_0, F, \delta)$. Betrachten Sie die Sprache

$$L_1 := \{a_1\# \ldots \#a_n \mid n \geq 1, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}^*, \exists i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \in L\}$$

der Wortfolgen, die ein Wort aus L enthalten.
Beschreiben Sie die Arbeitsweise einer deterministischen Mehrband-TM M_1 mit

$$L_1 = L_{M_1}.$$

Hinweis: *Es ist nicht garantiert, dass M auf jedem Input hält.*

Aufgabe 5 (Rekursive und nicht rekursive Sprachen) [12 Punkte]

Sei

$$w = \text{bin}(2006) = \texttt{11111010110}.$$

Zeigen Sie:

(a) [7 Punkte] $\{\langle M \rangle \mid w \in H_M\}$ ist nicht rekursiv.

(b) [5 Punkte] $\{\langle M \rangle \mid t_M(w) > 2006\}$ ist rekursiv.

Hinweis: *Universelle TM.*

Aufgabe 6 (Sätze aus der Vorlesung) [8 Punkte]

Beweisen Sie:

Wenn $L \leq_p L'$ und $L' \in \mathsf{P}$, dann ist $L \in \mathsf{P}$.

Hinweis: *Begründen Sie sorgfältig, wieso die TM für L polynomielle Laufzeit hat.*

Viel Erfolg!