TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut TTI, FG Automaten und Formale Sprachen
Prof. Dr. M. Kunde

Klausur Algorithmentheorie WS 03/04

18. Februar 2004

NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein. Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

abgegeben: **2 Aufgabenblätter**
. . . **eigene Blätter**

Einsichtnahme

Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Ges.
erreichbare Punktzahl	30	12	12	12	10	12	12	100
erreichte Punktzahl								

Aufgabe 1

[30 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 10 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ in jeder Zeile an. **Bewertung: Ist C die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl P der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C - 10\}$. Nichtbeantwortete Fragen werden wie falsche Antworten bewertet.**

(a) Für alle rekursiv aufzählbaren Sprachen L. . .

JA NEIN
[ ] [ ] gibt es eine deterministische Turingmaschine M mit $L_M = L$, die auf allen Eingaben hält.
[ ] [ ] gibt es eine nichtdeterministische Turingmaschine M mit $L_M = L$, die auf allen Eingaben hält.
[ ] [ ] gibt es eine deterministische Turingmaschine M mit $H_M = L$.

(b) Um zu beweisen, dass eine Sprache L nicht rekursiv ist, genügt es. . .

JA NEIN
[ ] [ ] zu zeigen, dass $H \leq L$.
[ ] [ ] eine Turingmaschine M mit $L = L_M$ anzugeben, die nicht auf allen Eingaben hält.
[ ] [ ] zu zeigen, dass $\overline{H} \leq L$.

(c) Wenn L eine rekursive Sprache ist, dann. . .

JA NEIN
[ ] [ ] ist $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar.
[ ] [ ] ist L^* rekursiv.
[ ] [ ] gilt $L \leq H$.

(d) Stimmen die folgende Aussagen?

JA NEIN
[ ] [ ] Sind L_1, L_2 rekursiv aufzählbare Sprachen, so auch $L_1 - L_2$.
[ ] [ ] Zu jeder k-Band-TM M existiert eine 1-Band-TM mit einseitig unbeschränktem Band, die dasselbe Eingabe-/Ausgabeverhalten wie M besitzt.
[ ] [ ] Wenn für eine NTM M gilt, dass $\mathrm{CT}_M(x)$ für alle Eingaben x endlich ist, dann ist L_M rekursiv.

(e) Aus dem Berechnungsbaum $\mathrm{CT}_M(x)$ einer nichtdeterministischen Turingmaschine M kann man...

JA NEIN
[ ] [ ] die nichtdeterministische Laufzeit von M auf x ablesen.
[ ] [ ] ablesen, ob L_M endlich ist.
[ ] [ ] ablesen, ob x akzeptiert wird.

(f) Sei M eine beliebige RAM mit polynomiell beschränkten uniformen Kosten. Dann ...

JA NEIN
[ ] [ ] hat M stets polynomielle Laufzeit.
[ ] [ ] hat M stets polynomiell beschränkte logarithmische Kosten.
[ ] [ ] gilt stets $f_M \in \mathsf{FP}$.

(g) Das Postsche Korresponenzproblem (PKP)...

JA NEIN
[ ] [ ] ist die Frage, ob es unter den Paaren $(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n) \in (\Sigma^*)^2$ zwei gleiche gibt.
[ ] [ ] ist nicht entscheidbar.
[ ] [ ] ist NP-vollständig.

(h) Stimmen die folgenden Aussagen?

JA NEIN
[ ] [ ] Für jede endliche Sprache L gilt $L \in \mathsf{P}$.
[ ] [ ] $L_{\texttt{CLIQUE}} \in \mathsf{NP}$
[ ] [ ] Falls $L_{\texttt{SAT}} \in \mathsf{P}$, dann gilt $L_{\texttt{CLIQUE}} \in \mathsf{P}$.

(i) Sind die folgenden Sprachen L rekursiv aufzählbar?

JA NEIN
[ ] [ ] $L = \overline{H}$
[ ] [ ] $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \varepsilon\}$
[ ] [ ] $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf unendlich vielen Eingaben}\}$

(j) Sind die folgenden Sprachen L rekursiv?

JA NEIN
[ ] [ ] $L = H$
[ ] [ ] $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \varepsilon\}$
[ ] [ ] $L = \{\langle M \rangle \mid H_M \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$

Aufgabe 2

[12 Punkte]

(a) Definieren Sie: Die deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, F, \delta)$ akzeptiert die Eingabe $x \in \Sigma^*$!

(b) Definieren Sie: Eine Sprache L ist rekursiv!

(c) Definieren Sie das Selbstanwendungsproblem K!

(d) Definieren Sie: $L_1 \leq L_2$!

(e) Formulieren Sie die drei Problemvarianten des Cliquenproblems!

(f) Definieren Sie: L ist NP-vollständig!

Aufgabe 3

[12 Punkte]

Geben Sie alle Komponenten einer Turingmaschine an, die folgendes leistet: Die Eingabe ist ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{0,1\} \times \{0,1\}$. Die Startkonfiguration $(q_0, B)w$ soll in die Konfiguration $w(q_h, a)$ überführt werden, wobei $w = w_1 \ldots w_n$, $w_i = (w_i^0, w_i^1) \in \Sigma$, und $a = (a^0, a^1) \in \Sigma$ mit

$$a^0 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^0\right) \bmod 2 \quad \text{und} \quad a^1 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^1\right) \bmod 2.$$

Geben Sie dabei δ in geeigneter Form an (Graph oder Tabelle oder Funktionsschreibweise oder...).

Aufgabe 4

[12 Punkte]

Das Problem $\texttt{PARTITION}$ ist wie folgt beschrieben: Gegeben sind n Objekte mit den Volumen a_1, ..., a_n. Ist es möglich, eine Auswahl I dieser Objekte zu treffen, so dass die Haufen I und $\overline{I}$ gleich groß sind? Formal erhalten wir:

$$L_{\texttt{PARTITION}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \exists I \subseteq \{1, \ldots, n\} : \sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \notin I} a_j\}$$

Das Problem $\texttt{RUCKSACK}^*$ ist wie folgt beschrieben: Gegeben sind n Objekte mit den Volumen a_1, ..., a_n und ein Rucksack mit Volumen b. Ist es möglich, eine Auswahl I dieser Objekte zu treffen, so dass die ausgewählten Elemente den Rucksack exakt füllen? Formal erhalten wir:

$$L_{\texttt{RUCKSACK}^*} = \{(a_1, \ldots, a_n, b) \mid \exists I \subseteq \{1, \ldots, n\} : \sum_{i \in I} a_i = b\}$$

Zeigen Sie: $L_{\texttt{PARTITION}} \leq_{\text{p}} L_{\texttt{RUCKSACK}^*}$.

Hinweis: *Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktionsfunktion. Sie brauchen aber keine Laufzeitanalyse vorzunehmen.*

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Zeigen Sie: Wenn $L_1 \leq_{\mathrm{p}} L_2$ und $L_2 \leq_{\mathrm{p}} L_3$, dann gilt $L_1 \leq_{\mathrm{p}} L_3$.

Aufgabe 6 [12 Punkte]

Sei $H_{\Sigma^*} := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf allen Eingaben}\}$. Zeigen Sie: H_{Σ^*} ist nicht rekursiv.

Aufgabe 7 [12 Punkte]

Sei L eine nicht rekursive Sprache. Zeigen Sie, dass $L' := \{0w \mid w \in L\} \cup \{1w \mid w \notin L\}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

Viel Erfolg!