TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut für Theoretische Informatik
FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Univ.-Prof. Dr. (USA) M. Dietzfelbinger

Klausur Berechenbarkeit und Komplexität WS 08/09

Matrikel 2006

3. März 2009

NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!

**Heftan Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Vornamen, Ihre Studiennummer und Matrikel ein.
Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.**

Arbeitszeit 90min

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

abgegeben: **2 Aufgabenblätter**
. . . **eigene Blätter**

Einsichtnahme

Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Ges.
erreichbare Punktzahl	18	13	16	10	16	17	90
erreichte Punktzahl							

Aufgabe 1

[18 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „JA“ oder „NEIN“ an.
Bewertung: Ist C die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl P der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C-6\}$. Nichtbeantwortete Fragen werden wie falsche Antworten bewertet.

(a) Sind die folgenden Aussagen für jedes RAM-Programm P korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn P auf Eingabe $(a_1, \ldots, a_n)$ hält, dann steht die Ausgabe in den Registern $R_0,\ R_1, \ldots, R_{\langle R_0 \rangle}$.
[ ] [ ] P benutzt eine feste Anzahl von Registern, die man aus dem Programm ablesen kann.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede** TM M korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn M auf Eingabe x hält, dann gilt $|f_M(x)| \le t_M(x) + |x|$.
[ ] [ ] Wenn M auf Eingabe x hält, dann gilt $s_M(x) \le t_M(x)$.

(c) Sind die folgenden Aussagen korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Es gibt eine Chomsky-0-Grammatik G mit $H = L(G)$.
[ ] [ ] Wenn L kontextsensitive Sprache ist, dann ist L rekursiv.

(d) Sind die folgenden Aussagen korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Für alle Sprachen L bzw. L' gilt: wenn $L \leq L'$ und L' ist rekursiv, dann ist L rekursiv.
[ ] [ ] Sind L und L' rekursiv aufzählbar, so auch $(L \cup L')^*$.

(e) Sind die folgenden Aussagen korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Die Sprache $\{\langle M \rangle \mid M$ hält auf Eingabe $\varepsilon\}$ ist rekursiv.
[ ] [ ] Für alle Sprachen L gilt: wenn $H \leq L$, dann ist $\overline{L}$ nicht rekursiv aufzählbar.

(f) Sind die folgenden Aussagen korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Zu einem gegebenen ASCII-Text P kann man entscheiden, ob P ein syntaktisch korrektes Java-Programm ist.
[ ] [ ] Zu zwei gegebenen Java-Programmen P und P' kann man entscheiden, ob P und P' das gleiche Ein-/Ausgabeverhalten besitzen.

(g) Sind die folgenden Aussagen stets korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] $L \leq_p L', L' \in \mathsf{P} \;\Rightarrow\; L \in \mathsf{P}$
[ ] [ ] Wenn $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, dann gilt $\mathsf{NPC} \cap \mathsf{P} = \emptyset$.

(h) Sind die folgenden Aussagen stets korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] $L_{3-\mathrm{SAT}} \leq_p L \;\Rightarrow\; L \in \mathsf{NPC}$
[ ] [ ] $L \in \mathsf{NP}, L \leq_p L' \;\Rightarrow\; L' \in \mathsf{NPC}$

(i) Sind die folgenden Aussagen stets korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] $L \in \mathsf{NP}$ und $L_{\mathrm{RUCKSACK}} \leq_p L \;\Rightarrow\; L$ ist NP-vollständig.
[ ] [ ] Wenn $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, dann gibt es für das Rucksackproblem keinen Polynomialzeitalgorithmus.

Aufgabe 2 (Definitionen und grundlegende Konzepte) [13 Punkte]

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe und Konzepte (wie in der Vorlesung) an!

(a) L ist rekursiv. [2 P.]

(b) NTM M ist $t(n)$-zeitbeschränkt. [2 P.]

(c) M akzeptiert x für eine NTM M, $x \in \Sigma^*$. [2 P.]

(d) $L \leq_p L'$ [3 P.]

(e) L ist NP-vollständig. [2 P.]

(f) Die KNF-Formel φ ist erfüllbar. [1 P.]

(g) $L_{\text{3-SAT}}$ [1 P.]

Aufgabe 3 ($L_{\text{BINPACKING}} \in \text{NPC}$) [16 Punkte]

Erinnerung:

Ein Element von $L_{\text{BINPACKING}}$ repräsentiert m Objekte mit Volumina $a_1, \ldots, a_m$ und k Behältnisse („bins") mit jeweils Kapazität b, sodass die m Objekte in die k Behältnisse gepackt werden können. $r_i = h$ heißt, dass das Objekt Nr. i im Behälter Nr. h sitzt. Formal gilt:

$$L_{\text{BINPACKING}} := \\ \{(a_1, \ldots, a_m, b, k) \in \mathbb{N}^{m+2} \mid \exists\, r_1, \ldots, r_m \in \{1, \ldots, k\} \forall\, h \in \{1, \ldots, k\} \colon \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ r_i = h}} a_i \leq b\}$$

Ein Element von $L_{\text{PARTITION}}$ repräsentiert m Gegenstände mit Gewichten $a_1, \ldots, a_m$, die man in zwei disjunkte „Haufen" mit gleichem Gesamtgewicht aufteilen kann. Formal gilt:

$$L_{\text{PARTITION}} := \{(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}^m \mid m \geq 2,\ \exists\, I \subseteq \{1, \ldots, m\} \colon \sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in \overline{I}} a_j\}$$

Zeigen Sie:

(a) $L_{\text{BINPACKING}} \in \text{NP}$ [8 P.]

(b) $L_{\text{PARTITION}} \leq_p L_{\text{BINPACKING}}$ [8 P.]

Aufgabe 4 (Simulation von RAM-Programmen durch Turingmaschinen) [10 Punkte]

Erklären Sie, wie die Simulation des RAM-Befehls

`11: if` $(R_{18} = 0)$ `goto 23`

auf einer TM abläuft, wenn $l - 1 \geq 23$ ist. Was ändert sich, wenn $l - 1 \leq 21$ ist?

Aufgabe 5 (Rekursive und nicht rekursive Sprachen) [16 Punkte]

Formulieren Sie den Satz von Rice in der Variante für Sprachen. [4 P.]
Zeigen Sie dann:

(a) $\{\langle M\rangle \mid M$ hält auf keiner Eingabe$\}$ ist nicht rekursiv. [7 P.]

(b) $\{\langle M\rangle \mid t_M(000) < 2009\}$ ist rekursiv. [5 P.]

Hinweis: *Universelle TM.*

Aufgabe 6 (Sätze aus der Vorlesung) [17 Punkte]

(a) Geben Sie an, wann genau eine universelle TM U auf Input $y \in \{0,1\}^*$ hält. [2 P.]

(b) Definieren Sie die Sprache H. [1 P.]

(c) Begründen Sie, dass H rekursiv aufzählbar ist. [2 P.]

(d) Definieren Sie die Sprache K. [1 P.]

(e) Beweisen Sie, dass K rekursiv aufzählbar ist. [5 P.]

(f) Beweisen Sie, dass $\overline{K}$ nicht r. a. ist. [6 P.]

Hinweis: *Wenden Sie (bei (c) und (e)) an, dass für jede TM M die Sprache H_M r. a. ist.*

Viel Erfolg!