TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut für Theoretische Informatik
FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Univ.-Prof. Dr. (USA) M. Dietzfelbinger

# Klausur Komplexitätstheorie WS 06/07

26. Februar 2007

**NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!**

**Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Vornamen, Ihre Studiennummer und Matrikel ein. Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner, Fotoapparate oder Mobiltelefone, zugelassen.**

Arbeitszeit 120min

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

**abgegeben:** **2 Aufgabenblätter**
**... eigene Blätter**

Einsichtnahme
Datum, Unterschrift

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Ges. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punktzahl | 30 | 10 | 10 | 14 | 14 | 12 | 10 | 100 |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | |

## Aufgabe 1 [30 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 30 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ an.
**Bewertung: Ist $C$ die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl $P$ der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C-6\}$. Nichtbeantwortete Fragen werden wie falsche Antworten bewertet.**
***Hinweis:*** *Bisher nur vermutete oder bisher unbekannte Aussagen sind zu verneinen.*

**(a)** Seien $L$ und $L'$ Sprachen und $f$ eine berechenbare Funktion, für die $x \in L \Longleftrightarrow f(x) \in L'$ gilt. Welche der folgende Aussagen ist/sind *bewiesenermaßen* korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn $L' \in \mathsf{DTIME}(n^3)$ und $f$ auf einer $O(n^2)$-zeitbeschränkten Turingmaschine berechenbar ist, dann gilt $L \in \mathsf{DTIME}(n^5)$.
[ ] [ ] Wenn $L' \in \mathsf{DTIME}(n^3)$ und $f$ auf einer $O(n^3)$-zeitbeschränkten Turingmaschine berechenbar ist, dann gilt $L \in \mathsf{DTIME}(n^6)$.
[ ] [ ] Wenn $L' \in \mathsf{NP}$ und $f$ auf einer polynomiell zeitbeschränkten TM berechenbar ist, dann gilt auch $L \in \mathsf{NP}$.

**(b)** Gibt es zu folgenden Problemstellungen *bewiesenermaßen* einen polynomialzeitbeschränkten Algorithmus? Entscheide, ob ...

JA NEIN
[ ] [ ] eine boolesche Formel, die in konjunktiver Normalform vorliegt, erfüllbar ist.
[ ] [ ] eine boolesche Formel, die in disjunktiver Normalform vorliegt, erfüllbar ist.
[ ] [ ] in einem Graphen $G = (V, E)$ ein Weg zwischen zwei gegebenen Knoten $v_1, v_2 \in V$ existiert.

**(c)** Welche der folgende Aussagen stimmen *bewiesenermaßen* für alle Sprachen $L$ und $L'$?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Wenn $L \leq_{\mathrm{p}} \mathtt{SAT}$ gilt, dann ist $L$ NP-schwer. |
| [ ] | [ ] | Wenn $L \leq_{\mathrm{p}} \mathtt{SAT}$ gilt, so ist $L \in \mathsf{NP}$. |
| [ ] | [ ] | Wenn $L \leq_{\mathrm{p}} \mathtt{SAT}$ und $\mathtt{CLIQUE} \leq_{\mathrm{p}} L'$ gilt, so ist $L \leq_{\mathrm{p}} L'$. |

**(d)** Aus $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ folgt, dass ...

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | der Satz von Cook/Levin nicht wahr ist. |
| [ ] | [ ] | die Strukturoptimierungsvariante des Cliquenproblems einen Polynomialzeitalgorithmus hat. |
| [ ] | [ ] | $\mathsf{NP} = \text{co-}\mathsf{NP}$. |

**(e)** Aus $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ folgt, dass ...

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | dass das MST-Problem keinen Polynomialzeitalgorithmus hat. |
| [ ] | [ ] | dass das Problem MIN COLORING nicht $\frac{6}{5}$-approximierbar ist. |
| [ ] | [ ] | dass das Suchproblem „3-dimensionales Matching“ keinen Polynomialzeitalgorithmus hat. |

**(f)** Sind folgende Aussagen (*bewiesenermaßen*) korrekt?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | TAUTOLOGIE ist co-NP-vollständig. |
| [ ] | [ ] | Für alle co-NP-vollständigen Sprachen $L$ ist $\overline{L}$ NP-vollständig. |
| [ ] | [ ] | $\mathtt{SAT} \leq_{\mathrm{p}}$TAUTOLOGIE. |

**(g)** Aus der Annahme $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ folgt (*bewiesenermaßen*):

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Es gibt für MIN TSP keinen 8-Approximations-Algorithmus. |
| [ ] | [ ] | MIN BIN PACKING ist nicht 2-approximierbar. |
| [ ] | [ ] | MAX RUCKSACK besitzt kein polynomielles Approximationsschema. |

**(h)** Sind folgende Aussagen (*bewiesenermaßen*) korrekt?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Die Tiefe des Berechnungsbaumes $CT(M, x)$ einer NTM $M$ auf Eingabe $x$ bestimmt die „Zeit“ $t_M(x)$ von $M$ auf $x$. |
| [ ] | [ ] | $\{\langle G \rangle \mid G \text{ ist ein Graph, der eine Clique der Größe 10 besitzt}\} \in \mathsf{P}$. |
| [ ] | [ ] | $\{\langle G \rangle\, \mathrm{bin}(k) \mid G \text{ ist ein Graph, der eine Clique der Größe } k \text{ besitzt}\} \in \mathsf{P}$. |

**(i)** Sind folgende Aussagen für alle $L_1, L_2$ korrekt?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Wenn $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \leq_p L_1$, dann ist $L_1 = L_2$. |
| [ ] | [ ] | Wenn $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \in \mathsf{NP}$, dann ist $L_1 \in \mathsf{NP}$. |
| [ ] | [ ] | Wenn $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \in \mathsf{NPC}$, dann ist $L_1 \in \mathsf{NPC}$ |

**(j)** Sind folgende Aussagen korrekt?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Der Satz von Cook/Levin impliziert, dass es ein NP-vollständiges Problem gibt. |
| [ ] | [ ] | Der Satz von Cook/Levin wird bewiesen, indem für jede KNF-Formel $\varphi$ eine zugehörige polynomialzeitbeschränkte NTM $M_\varphi$ konstruiert wird. |
| [ ] | [ ] | Es ist ein offenes Problem, ob es für jede polynomialzeitbeschränkte NTM $M$ eine polynomialzeitbeschränkte DTM $M'$ mit $L_M = L_{M'}$ gibt. |

**Aufgabe 2 Definieren Sie ...** [10 Punkte]

**(a)** [2 Punkte] „NTM $M$ ist polynomiell zeitbeschränkt“.

**(b)** [2 Punkte] „$L$ ist NP-vollständig“.

**(c)** [2 Punkte] die „Klasse co-NP“.

**(d)** [2 Punkte] „Approximationsgüte $r_{\mathcal{A}}(x)$ für einen Input $x \in I$“.
($\mathcal{A}$ Algorithmus für Problem $\mathcal{P} = (I, \text{SOL}, m, \text{GOAL})$.)

**(e)** [2 Punkte] „Algorithmus $\mathcal{A}$ ist ein PTAS für das NPO-Problem $\mathcal{P}$“.

**Aufgabe 3** (MIN SET COVER) [10 Punkte]

Das Problem MIN SET COVER besteht informal in folgendem:
Gegeben $n \geq 1$ und $r$ Teilmengen $C_1, \ldots, C_r \subseteq A := \{1, \ldots, n\}$.
Finde eine möglichst kleine Auswahl der Mengen, die ganz $A$ überdecken.

**(a)** [5 Punkte] Beschreiben Sie das Problem im $\mathcal{P} = (I, \text{SOL}, m, \text{GOAL})$-Formalismus.

**(b)** [5 Punkte] Begründen Sie, warum es sich um ein NPO-Problem handelt!
(Eine Aussage zu $I$, eine zu SOL, eine zu $m$.)

---

Alternativ (aber mit Punktabzug) können Sie die Aufgabe auch für das Problem MAX CLIQUE lösen.

---

**Aufgabe 4** (**Reduktion**) [14 Punkte]

Beschreiben Sie die Reduktionsfunktion $f$, die zu der Reduktion

$$\text{3-SAT} \leq_p \text{DHC}$$

gehört.

---

Alternativen (aber mit Punktabzug): Lösen Sie dieselbe Aufgabe
- für die Reduktion SAT $\leq_p$ 3-SAT oder
- für die Reduktion $k$-COLORING $\leq_p$ $k'$-COLORING für $k < k'$.

---

**Aufgabe 5** (ANY FIT) [14 Punkte]

Das Optimierungsproblem MIN BINPACKING ist bekannt.

Der Algorithmus ANY FIT läuft informal so ab auf Input $(a_1, \dots, a_n, b)$:
In Runde $i$ behandle Objekt $a_i$ wie folgt:
Suche irgendeinen <u>nichtleeren</u> Behälter $j$, in den $a_i$ noch passt, stecke $a_i$ in Behälter $j$.
Falls kein solcher Behälter existiert: stecke $a_i$ in den ersten leeren Behälter.

**(a)** [6 Punkte] Formulieren Sie den Algorithmus genauer.
(Schleife; welche Größen muss man betrachten?)

**(b)** [8 Punkte] Zeigen Sie: AF ist 2-Approximationsalgorithmus für MIN BINPACKING .

**Aufgabe 6** (MIN BINPACKING) [12 Punkte]

Zeigen Sie: $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP} \Longrightarrow$ MIN BINPACKING hat keinen $(\frac{3}{2} - \varepsilon)$-Approximationsalgorithmus.

***Hinweis:*** *Aus einem solchen Algorithmus $\mathcal{A}$ könnte man einen Polynomialzeit-Algorithmus $\mathcal{B}$ für* PARTITION *bauen. Wie funktioniert $\mathcal{B}$?*

**Aufgabe 7** (MIN GRAPH COLORING) [10 Punkte]

Das Problem, die Knoten eines Graphen $G$ mit möglichst wenigen Farben legal zu färben, heißt MIN GRAPH COLORING.

**(a)** [4 Punkte] Geben Sie eine Beschreibung von MIN GRAPH COLORING in der $\mathcal{P} = (I, \textsc{Sol}, m, \textsc{Goal})$-Notation an.

**(b)** [2 Punkte] Machen Sie Aussagen über die (Nicht-)Approximierbarkeit von MIN GRAPH COLORING. (Auch in der Vorlesung genannte, nicht bewiesene Aussagen.)

**(c)** [4 Punkte] Zeigen Sie: Wenn MIN GRAPH COLORING $(\frac{4}{3} - \varepsilon)$-approximierbar ist, ist $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

***Hinweis:*** *Benutzen Sie (ohne Beweis) die Tatsache, dass die Reduktionsfunktion $f : \varphi \mapsto G_\varphi$ aus der Reduktion* 3-SAT $\leq_p$ 3-COLORING *entweder 3- oder 4-färbbare Graphen $G_\varphi$ liefert.*

# Viel Erfolg!