



## Klausur Logische Strukturen SS 2009

20. August 2009

**NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!**

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt  
 Ihren Namen und Vornamen, Ihre Studiennummer und Matrikel ein.  
 Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Arbeitszeit 90min

Name, Vorname:

Studiennummer und Matrikel:

Code
------

**abgegeben:      2 Aufgabenblätter**  
                           ... eigene Blätter

Einsichtnahme
Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ	Bonus	Ges.	Note
erreichbare Punktzahl	18	18	9	12	12	12	9	90	18	90 (+18)	
erreichte Punktzahl											

### Aufgabe 1

[18 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „JA“ oder „NEIN“ an.

**Bewertung:** Ist  $R$  die Anzahl der richtigen und  $F$  die Anzahl der falschen Antworten, so errechnet sich die Anzahl  $P$  der erzielten Punkte aus  $P := \max\{0, R - F\}$ .

- Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

JA    NEIN

- Eine aussagenlogische Formel  $F$  hat auch ohne eine zu ihr passende Belegung einen Wahrheitswert.
- Wenn für aussagenlogische Formeln  $F, G$  gilt  $F \equiv G$ , dann müssen in  $F$  und  $G$  genau dieselben aussagenlogischen Variablen vorkommen.
- Seien  $F$  und  $G$  aussagenlogische Formeln. Wenn  $F$  unerfüllbar ist, dann gilt  $(F \wedge G) \equiv F$ .
- Wenn eine (unendliche) Menge  $\mathcal{F}$  von aussagenlogischen Formeln unerfüllbar ist, dann ist eine endliche Teilmenge  $\mathcal{F}_0$  von  $\mathcal{F}$  unerfüllbar.
- Zu jeder aussagenlogischen Formel  $F$  gibt es eine äquivalente  $\{\wedge, \vee, \neg\}$ -Formel  $F'$ .

- Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

JA NEIN

- Die Klauseln  $C_1 = A \vee \neg B \vee D \vee E$  und  $C_2 = \neg A \vee B \vee D$  besitzen die Resolvente  $C_3 = D \vee E$ .
- Es gibt einen Algorithmus, der zu prädikatenlogischen Formeln  $F_1, \dots, F_n$  und  $F$  in endlich vielen Schritten feststellt, dass  $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$  gilt, wenn dies der Fall ist.
- Sind  $t_1, \dots, t_k$  Terme und ist  $R_i$  ein  $k$ -stelliges Relationssymbol, so ist auch  $R_i(t_1, \dots, t_k)$  ein Term.
- Sei  $P$  ein 2-stelliges Relationssymbol und  $f$  ein 1-stelliges Funktionssymbol. Dann gilt:  $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \forall x P(x, f(x))$ .
- Sei  $F$  eine prädikatenlogische Formel. Dann ist die Matrixklauselform  $\text{MKF}(F)$  von  $F$  äquivalent zu  $F$ .
- Sei  $F$  eine geschlossene prädikatenlogische Formel in Skolemform. Das Herbrand-Universum  $D(F)$  ist die Menge aller in  $F$  vorkommenden Konstanten und Funktionssymbole.
- Sei  $F$  eine geschlossene prädikatenlogische Formel in Skolemform. Dann gilt:  $F$  ist erfüllbar genau dann, wenn ein Herbrand-Modell für  $F$  existiert.
- Sei  $F$  geschlossene prädikatenlogische Formel in Skolemform. Dann gilt:  $F$  ist unerfüllbar genau dann, wenn die Herbrand-Expansion  $E(F)$  im aussagenlogischen Sinn unerfüllbar ist.
- Sei  $F$  eine erfüllbare prädikatenlogische Formel. Dann findet dies der Grundresolutionsalgorithmus bei Eingabe  $F$  nach endlich vielen Schritten heraus.
- Sei  $(\Sigma, X, \text{Axs})$  eine Spezifikation. Eine  $\Sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  (zu  $\Sigma$  passende Struktur) ist gegeben durch eine Folge  $(s_{\mathcal{A}})_s$  Sorte in  $\Sigma$  von nichtleeren Mengen und für jede Operation  $\text{op}: s_1 \times \dots \times s_k \rightarrow s_{k+1}$  eine Funktion  $\text{op}_{\mathcal{A}}: (s_1)_{\mathcal{A}} \times \dots \times (s_k)_{\mathcal{A}} \rightarrow (s_{k+1})_{\mathcal{A}}$ .
- In initialen Modellen  $\alpha = (\mathcal{A}^*, \xi)$  gibt es für jedes Element  $x \in s_{\mathcal{A}^*}$  der Interpretation einer Sorte  $s$  einen Term  $t$  mit  $\alpha(t) = x$ .
- Das initiale Modell für die Spezifikation `nat` aus der Vorlesung erfüllt die Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen.
- Die Spezifikation `bool` aus der Vorlesung besitzt nur ein einziges Modell.

**Aufgabe 2** (Definitionen und grundlegende Konzepte)

[18 Punkte]

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe und Konzepte (wie in der Vorlesung) an!

- (a)  $F$  ist eine *aussagenlogische Formel*. (Induktive Definition.) [3 P.]
- (b) Die aussagenlogische Formel  $F$  ist eine *Tautologie*. [2 P.]
- (c) Die aussagenlogische Formel  $G$  ist *Folgerung* aus der aussagenlogischen Formel  $F$ , in Zeichen  $F \models G$ . [2 P.]
- (d) Die Klausel  $C$  ist *Resolvente* von Klauseln  $\{l_1, \dots, l_r\}$  und  $\{l'_1, \dots, l'_s\}$ . [3 P.]
- (e) Die prädikatenlogische Formel  $F$  ist *erfüllbar*. [2 P.]
- (f) Die prädikatenlogische Formel  $F$  ist in *Skolemform*. [3 P.]
- (g)  $D(F)$  ist *Herbrand-Universum* und  $\alpha$  ist *Herbrand-Struktur* zur prädikatenlogischen Formel  $F$  in geschlossener Skolemform. [3 P.]

**Aufgabe 3**

[9 Punkte]

Gegeben sei die aussagenlogische Formel

$$F = (B \vee (C \wedge (C \rightarrow A))) \wedge \neg(A \wedge \neg B) \wedge (B \rightarrow D) \wedge (\neg D)$$

- (a) Bestimmen Sie die Klauselmenge  $\mathcal{K}(F)$  (über den Zwischenschritt KNF).
- (b) Wenden Sie auf  $\mathcal{K}(F)$  aussagenlogische Resolution an und entscheiden Sie so, ob  $F$  erfüllbar ist oder nicht (Antwort hinschreiben!).

**Aufgabe 4**

[12 Punkte]

Formulieren Sie die folgenden Aussagen über die Bewohner von Transsylvanien (Menschen und Vampire) als prädikatenlogische Formeln und geben Sie jeweils eine passende Struktur an:

- (a) Alle geisteskranken Vampire sagen die Wahrheit.
- (b) Ist ein Mensch geistig gesund, so ist mindestens einer seiner Elternteile geistig gesund.
- (c) Vampire heiraten nur Vampire.
- (d) Alle geisteskranken Vampire haben mindestens ein Kind.

**Hinweis:** Es ist möglich, die Aussagen durch Formeln zu beschreiben, welche nicht mehr als zwei 1-stellige Funktionssymbole  $v$  und  $m$ , drei Eigenschaften  $V$ ,  $G$  und  $W$  sowie zwei 2-stellige Prädikatsymbole  $P$  und  $K$  enthalten.

**Aufgabe 5**

[12 Punkte]

Gegeben sei die prädikatenlogische Formel

$$F = \exists x P(x) \vee \neg \exists x (\forall y (P(x) \rightarrow Q(x, y)) \vee \exists y Q(z, f(y))) ,$$

wobei  $P$  ein 1-stelliges Prädikatsymbol,  $Q$  ein 2-stelliges Prädikatsymbol, und  $f$  ein 1-stelliges Funktionssymbol darstellt. Transformieren Sie  $F$  schrittweise in Matrixklauselform (erfüllbarkeitsäquivalent):

- (a) Transformieren Sie  $F$  in bereinigte Pränexnormalform  $F_1 \equiv F$ .
- (b) Fügen Sie Existenzquantoren hinzu, um eine erfüllbarkeitsäquivalente geschlossene Formel  $F_2$  zu erhalten.
- (c) Transformieren Sie  $F_2$  in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel  $F_3$  in Skolemform.
- (d) Bilden Sie aus  $F_3$  die Matrixklauselform  $\text{MKF}(F)$ .

**Aufgabe 6**

[12 Punkte]

- (a) Sei  $F$  eine beliebige prädikatenlogische Formel. Zeigen Sie:

$$\exists x \forall y F \rightarrow \forall y \exists x F \quad \text{ist allgemeingültig (für } x \neq y \text{) .}$$

- (b) Finden Sie eine Formel  $C$ , die nur  $x$  und  $y$  als freie Variable enthält, sowie eine zu  $C$  passende Struktur  $\alpha$  mit  $\alpha \models \forall y \exists x C$  aber  $\alpha \not\models \exists x \forall y C$ . D. h.,

$$\forall y \exists x C \rightarrow \exists x \forall y C \quad \text{ist widerlegbar (für } x \neq y \text{) .}$$

**Aufgabe 7**

[9 Punkte]

<b>bool</b>	sorts bool ops true: ... false: ... neg: bool $\rightarrow$ bool and: bool $\times$ bool $\rightarrow$ bool or: bool $\times$ bool $\rightarrow$ bool ite: ...	vars p, q: bool axs ite(true,p,q) = ... ite(false,p,q) = ... neg(p) = ... and(p,q) = ... or(p,q) = ...
-------------	--	---

- (a) Ergänzen Sie die acht durch ... gekennzeichneten Stellen in der Spezifikation. (Schreiben Sie die vollständigen Zeilen auf Ihr Lösungsblatt.)
- (b) Geben Sie acht Grundterme dieser Spezifikation an.
- (c) Geben Sie die Menge  $\text{bool}_{\mathcal{A}^*}$  an, die im *initialen Modell*  $\mathcal{A}^*$  die Sorte bool interpretiert.

**Viel Erfolg!**