

Klausur Berechenbarkeit und Komplexität WS 2010/2011

21. Februar 2011

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein. Außer zwei handgeschriebenen A4-Seiten sind keine Hilfsmittel erlaubt. Insbesondere gelten eingeschaltete Mobiltelefone als Betrugsversuch.

Arbeitszeit 90 min

Name, Vorname:

Studiennummer und Matrikel:

**abgegeben: 2 Aufgabenblätter
 ... eigene Blätter**

Einsichtnahme
Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Bonus	Ges.
erreichbare Punktzahl	18	9	14	7	12	3		63
erreichte Punktzahl								

Aufgabe 1

[18 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 18 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ in jeder Zeile an.
Bewertung: Für jede korrekte Antwort erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Wurde kein Kreuz gemacht, erhalten Sie keinen Punkt. Insgesamt erhalten Sie keine negativen Punkte auf diese Aufgabe.

(a) Sind die folgenden Aussagen für μ -rekursive Funktionen korrekt?

JA NEIN

Jede totale Funktion ist μ -rekursiv.

Es existiert eine μ -rekursive Funktion, die LOOP-berechenbar ist.

(b) Sei K das spezielle Halteproblem. Um zu zeigen, dass eine Sprache L nicht entscheidbar ist, genügt es

JA NEIN

$L \leq \bar{K}$ zu zeigen.

$K \leq L$ zu zeigen.

(c) Zu einem nichtdeterministischen LBA A existiert

JA NEIN

eine Typ-0-Grammatik G mit $L(G) = T(A)$.

eine deterministische Turingmaschine M mit $T(M) = T(A)$.

(d) Die folgenden Sprachen $L \subseteq \{0,1\}^*$ sind entscheidbar:

JA NEIN

$\{w \mid M_w \text{ hat mindestens } 10^6 \text{ Zustände}\}$

$\{w \mid \varepsilon \in T(M_w)\}$

(e) Eine Sprache $L \in \text{NP}$ ist NP-vollständig, falls

JA NEIN

$\text{SAT} \leq_p L$ gilt.

$L \leq_p 3\text{-SAT}$ gilt.

(f) Die folgenden Mengen sind semi-entscheidbar:

JA NEIN

$\{(G_1, G_2) \mid G_1, G_2 \text{ Typ-2-Grammatiken, } L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset\}$

$\{w \mid M_w \text{ hält nicht auf dem leeren Band}\}$

(g) Gelten die folgenden Aussagen für die Reduktion einer Sprache A auf eine Sprache B ?

JA NEIN

Es gilt $A \leq B$ für $A, B \subseteq \Sigma^*$, falls es eine totale und berechenbare Funktion f gibt, so dass $\forall x \in A : f(x) \in B$.

Falls A entscheidbar ist und es gilt $A \leq B$, dann ist auch B entscheidbar.

(h) Welche der folgenden Aussagen gelten für primitiv rekursive Funktionen?

JA NEIN

Die Menge der primitiv rekursiven Funktionen ist unter Einsetzung abgeschlossen.

Die überall undefinierte Funktion Ω ist primitiv rekursiv.

(i) Sind die folgenden Aussagen korrekt?

JA NEIN

Sei \mathcal{R} die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache $C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$ unentscheidbar.

Die Menge $\{w \mid w \text{ ist Kodierung einer Turingmaschine}\}$ ist abzählbar unendlich.

Aufgabe 2

[3 + 5 + 1 = 9 Punkte]

Seien $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ und $M' = (Z', \Sigma, \Gamma', \delta', z'_0, \square, E')$ beliebige Turingmaschinen. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben und achten Sie darauf, die Arbeitsweise der gesuchten Turingmaschinen verbal (d.h. ohne die genaue Ausführung des 7-Tupels), aber deutlich zu beschreiben. Begründen Sie kurz, warum Ihre Turingmaschine die geforderte Sprache erkennt.

- (a) Beschreiben Sie die Arbeitsweise einer 1-Band-TM M_1 mit

$$T(M_1) = T(M) \cup T(M').$$

- (b) Beschreiben Sie die Arbeitsweise einer 2-Band-TM M_2 mit

$$T(M_2) = T(M)T(M').$$

- (c) Welche Aussage gewinnt man durch diese beiden Konstruktionen über die Abschlusseigenschaften von Typ-0-Sprachen?

Aufgabe 3

[6 + 2 + 4 + 2 = 14 Punkte]

Wir beschäftigen uns in dieser Aufgabe mit verschiedenen Berechenbarkeitsmodellen. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

- (a) Zeigen Sie, dass $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ LOOP-berechenbar ist. Beschreiben Sie Ihre zugrundeliegende Idee auf jeden Fall auch verbal.
- (b) Beschreiben Sie kurz aber eindeutig, wie man ein LOOP-Programm in ein WHILE-Programm umwandelt.
- (c) Eine deterministische Turingmaschine mit drei Bandsymbolen steht in der Konfiguration $001z_6100\square$. Erläutern Sie, wie diese Konfiguration bei der Simulation einer Turingmaschine durch ein GOTO-Programm in den Variablen des GOTO-Programms dargestellt wird. Beschreiben Sie kurz, wie der Zustandsübergang $\delta(z_6, 1) = \{(z_7, 1, R)\}$ im GOTO-Programm simuliert wird.
- (d) Was besagt die Churchsche These?

Aufgabe 4

[7 Punkte]

Zeigen Sie: A semi-entscheidbar $\Leftrightarrow A$ rekursiv aufzählbar.

Hinweis: Betrachten Sie dabei die Fälle A endlich bzw. unendlich für die Richtung \Rightarrow getrennt.

Bitte wenden!

Aufgabe 5

[5 + 4 + 3 = 12 Punkte]

Jedes GOTO-Programm besitzt eine endlich lange Beschreibung. Somit kann man ein GOTO-Programm als endlich langes Wort über $\{0,1\}$ kodieren.

Sei G_p das durch $p \in \{0,1\}^*$ kodierte GOTO-Programm. Wir betrachten die Menge

$$A = \{p \mid \forall y \in \mathbb{N}, y \leq 10 : \text{Das GOTO-Programm } G_p \text{ berechnet auf Eingabe } y \text{ die Ausgabe } y\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A unentscheidbar ist.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie den aus der Vorlesung bekannten Satz von Rice nicht direkt auf A anwenden können.

(b) Zeigen Sie, dass A semi-entscheidbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$A' = \{p \mid \exists y \in \mathbb{N}, y \leq 10 : \text{Das GOTO-Programm } G_p \text{ berechnet auf Eingabe } y \text{ nicht die Ausgabe } y\}.$$

nicht semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 6

[3 Punkte]

Begründen Sie, dass die folgende PCP-Instanz keine Lösung besitzt:

$$I = ((10,01), (101,01), (110,11)).$$

Viel Erfolg!