TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut für Theoretische Informatik
FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Priv.-Doz. Dr. rer. nat. habil. K.-H. Niggl

# Wiederholungsklausur „Automaten und Formale Sprachen“

23. Juli 2007

**NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!**

**Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein.**

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

**abgegeben:** **2 Aufgabenblätter**
... **eigene Blätter**

Einsichtnahme

Datum, Unterschrift

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Ges. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punktzahl | 30 | 13 | 10 | 10 | 11 | 13 | 13 | 100 |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | |

**Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.**

**Aufgabe 1** (Fragenkatalog zur Vorlesung) [30 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 30 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ an.
**Bewertung:** Ist $C$ die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl $P$ der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C-10\}$. Insbesondere: Kein Kreuz wird als falsche Antwort gewertet.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

JA NEIN
[ ] [ ] Sind $L, L'$ reguläre Sprachen, so auch $(L^* \cup L') \cap ((L' \setminus L) \cup \text{ASCII-Zeichensatz})$.
[ ] [ ] Sind $M, M'$ zwei **DFA**s mit $n$ bzw. $n'$ Zuständen, so besitzt jeder minimale **DFA** $M''$ mit $L_{M''} = L_M \cap L_{M'}$ höchstens $n \cdot n'$ Zustände.
[ ] [ ] Zu jeder regulären Sprache $L$ existiert ein regulärer Ausdruck $r$ mit $L(r) = L^{100}$.

(b) Welche der folgenden Sprachen ist/sind regulär?

JA NEIN
[ ] [ ] $\{w \in \{\text{a}, \text{b}\}^* \mid |w|_\text{a} \text{ ist durch 19 teilbar oder } |w|_\text{a} = |w|_\text{b}\}$
[ ] [ ] $\{r \mid r \text{ ist regulärer Ausdruck über dem ASCII-Zeichensatz}\}$
[ ] [ ] $\{\text{a}^n \mid n \geq 1,\ n \text{ ist von der Form } n = 2^m\}$

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für $L := \{u\text{b}v \in \{\text{a}, \text{b}\}^+ \mid |v| = 99\}$ richtig?

JA NEIN
[ ] [ ] $L$ ist eine reguläre Sprache.
[ ] [ ] Es existiert ein **DFA** $M$ mit höchstens $2^{100}-1$ Zuständen und $L_M = L$.
[ ] [ ] Es existiert ein **NFA** $M$ mit höchstens 99 Zuständen und $L_M = L$.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede rechtslineare** Grammatik $G = (V, \ldots)$ richtig?

JA NEIN
[ ] [ ] Für jeden regulären Ausdruck $r$ gilt $L(r) \neq L(G)$.
[ ] [ ] Jeder **DFA** $M$ mit $L_M = L(G)$ besitzt mindestens $2^{|V|}+1$ Zustände.
[ ] [ ] Es existiert ein **NFA** $M$ mit höchstens $|V|$ Zuständen und $L_M = L(G)$.

(e) Um zu zeigen, daß eine Sprache $L$ **nicht regulär** ist, genügt es...

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | zu jedem $n \geq 1$ ein Wort $z \in L$ und eine Zerlegung $z = uvw$ mit $\lvert v \rvert \geq 1$ anzugeben, sodaß $uv^iw \notin L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. |
| [ ] | [ ] | eine kontextsensitive Grammatik $G'$ mit $L(G') = L$ anzugeben. |
| [ ] | [ ] | das Beweisschema für die Kontraposition des Pumpinglemmas für reguläre Sprachen erfolgreich durchzuführen. |

(f) Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Zu jedem **DFA** ohne überflüssige Zustände kann mittels Markierungsalgorithmus die Zustandsmenge eines dazu äquivalenten minimalen DFAs ermittelt werden. |
| [ ] | [ ] | Beim Markierungsalgorithmus werden alle Zustandspaare $(q, q')$ mit $q \sim q'$ markiert. |
| [ ] | [ ] | Der Markierungsalgorithmus markiert in einer Runde $i+1$ jedes unmarkierte Zustandspaar $(q, q')$, für das ein markiertes Paar $(\delta(q, \mathrm{a}), \delta(q', \mathrm{a}))$ existiert. |

(g) Man betrachte die Grammatik $G := (\{S, A, B\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, S, \{S \to \mathrm{a}A \mid \varepsilon,\ A \to \mathrm{a}A \mid \mathrm{b}B,\ B \to S \mid \mathrm{b}B\})$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | $G$ ist eine rechtslineare Grammatik. |
| [ ] | [ ] | $G$ ist eine kontextsensitive Grammatik. |
| [ ] | [ ] | $L(G)$ ist eine reguläre Sprache. |

(h) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede kontextfreie** Grammatik $G$ richtig?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Es existiert ein Kellerautomat $M$ mit $L_M = L(G)$. |
| [ ] | [ ] | Es existiert eine Grammatik $G^*$ in Chomsky-Normalform mit $L(G^*) = L(G)$. |
| [ ] | [ ] | Es existiert ein deterministischer Kellerautomat $M$ mit $L_M = L(G)$. |

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Die Sprache $\{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n\mathrm{c}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei. |
| [ ] | [ ] | Es existiert ein Kellerautomat $M$ mit $L_M = \{w^R w \mid w \in \Sigma^*\}$. |
| [ ] | [ ] | Die Sprache $\{\mathrm{a}^i\mathrm{b}^j\mathrm{c}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } (i \neq j \text{ oder } j \neq k)\}$ ist deterministisch kontextfrei. |

(j) Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

| JA | NEIN | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Sind $L, L'$ kontextfreie Sprachen, so auch $(L^* \cup L')\overline{L}$. |
| [ ] | [ ] | Ist $L$ eine kontextfreie Sprache, so auch $L \cap L'$, für jede reguläre Sprache $L'$. |
| [ ] | [ ] | Sind $L, L'$ deterministisch kontextfreie Sprachen, so auch $L \setminus L'$. |

**<u>Aufgabe 2</u>** (Definitionen von Begriffen und Konzepten aus der Vorlesung) [13 Punkte]

Definieren Sie:

(a) $\Sigma$ ist ein *Alphabet* und $L$ ist eine *Sprache*.

(b) die *Fortsetzung* $\hat{\delta}\colon Q\times\Sigma^* \to Q$ *von* $\delta$, für einen DFA $M=(Q,\Sigma,q_0,F,\delta)$.

(c) die Menge $\mathbf{RA}_\Sigma$ der *regulären Ausdrücke über* $\Sigma$, für ein Alphabet $\Sigma$.

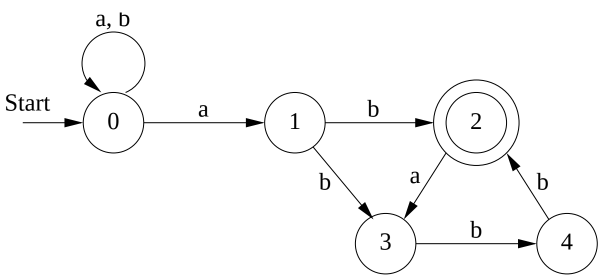
(d) $q \sim_M q'$ ($q$ *ist bzgl.* $M$ *äquivalent zu* $q'$), für Zustände $q, q'$ eines DFA $M=(Q,\Sigma,q_0,F,\delta)$.

(e) $\alpha \Rightarrow_G \beta$ ($\beta$ *ist in einem* $G$*-Schritt aus* $\alpha$ *ableitbar*), für eine Grammatik $G=(V,\Sigma,S,P)$.

(f) $G=(V,\Sigma,S,P)$ ist eine Grammatik in *Chomsky-Normalform*.

**<u>Aufgabe 3</u>** (DFA aus NFA konstruieren) [10 Punkte]

Betrachten Sie den folgenden **NFA** $M=(Q,\Sigma,q_0,F,\delta)$ in graphischer Darstellung:




Erzeugen Sie mittels **Potenzmengenkonstruktion für erreichbare Zustände** einen äquivalenten **DFA** $M'$ ($L_{M'}=L_M$) unter Angabe der einzelnen Komponenten von $M'=(Q',\Sigma,q_0',F',\delta')$.

**<u>Aufgabe 4</u>** (Reguläre Ausdrücke in $\varepsilon$-NFA, rechtslineare Grammatik) [10 Punkte]

Betrachten Sie den folgenden regulären Ausdruck $r$:

$$r=(\varepsilon+(s^*)) \quad \text{mit} \quad s:=((\mathrm{a}+\emptyset)\mathrm{b})$$

(a) Konstruieren Sie gemäß **Verfahren aus der Vorlesung** einen **$\varepsilon$-NFA** $M_r$ in graphischer Darstellung mit $L_{M_r}=L(r)$. Gehen Sie dabei hierarchisch vor, indem Sie nacheinander $M_s, M_{s^*}$ und dann $M_r$ bestimmen.

(b) Geben Sie eine **rechtslineare Grammatik** $G=(V,\Sigma,S,P)$ mit $L(G)=L(r)$ an.

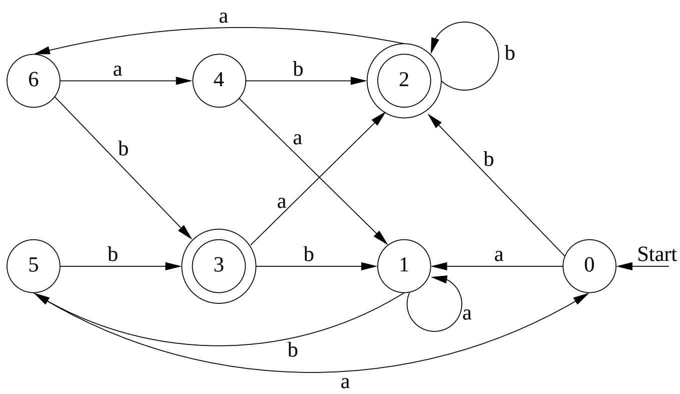
**<u>Aufgabe 5</u>** (Nachweis der Nicht-Kontextfreiheit von Sprachen) [11 Punkte]

Beweisen Sie, daß die nachfolgende Sprache $L$ **nicht kontextfrei** ist.

$$L:=\{\mathrm{a}^m\mathrm{b}^{2m}\mathrm{c}^{3m} \mid m\geq 1\}$$

**Aufgabe 6** (Minimierung) [13 Punkte]

Betrachten Sie den folgenden DFA $M=(Q,\Sigma,0,F,\delta)$ in graphischer Darstellung:




(a) Bestimmen Sie mittels **Markierungsalgorithmus** die Äquivalenzklassen in $Q$ bezüglich $\sim_M$.

Kennzeichnen Sie ein **in Runde** $i$ **zu markierendes Paar** $(q,q')$, indem Sie in das betreffende Kästchen der rechtsstehenden Tabelle die Nummer $i$ der Runde eintragen.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | | | |
| **2** | | | | | | |
| **3** | | | | | | |
| **4** | | | | | | |
| **5** | | | | | | |
| **6** | | | | | | |
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |

(b) Bestimmen Sie den **Minimalautomaten** $\tilde{M}=(\tilde{Q},\Sigma,\tilde{q}_0,\tilde{F},\tilde{\delta})$ für $L_M$ und geben Sie $\tilde{M}$ in graphischer Darstellung an.

**Aufgabe 7** (Kontextfreie Grammatik in CNF) [13 Punkte]

Betrachten Sie die Grammatik $G=(V,\Sigma,S,P)$ mit $V := \{S,A,B\}$, $\Sigma := \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}$ und Produktionen $P$:

$$\begin{aligned} S &\to \mathrm{a}S \mid \mathrm{b}B \mid A \\ B &\to SA \\ A &\to \mathrm{ab}A \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Erzeugen Sie gemäß **Verfahren aus der Vorlesung** in vier Schritten $(G_1,G_2,G_3,G_4)$ eine Grammatik $G_4$ in **Chomsky-Normalform** mit $L(G_4)=L(G)\setminus\{\varepsilon\}$.

**Hinweis:** Verwenden Sie zur Angabe der Produktionen $P_3$ und $P_4$ abkürzende Schreibweisen wie

$$\begin{aligned} P_3 &= (P_2 \setminus \{\varepsilon\text{-}\textit{Produktionen}\}) \cup \{\ldots\} \\ P_4 &= (P_3 \setminus \{\textit{Kettenregeln}\}) \cup \{\ldots\} \end{aligned}$$

wobei natürlich die $\varepsilon$-*Produktionen* von $G_2$ sowie die *Kettenregeln* von $G_3$ noch anzugeben sind.

# Viel Erfolg!