TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut für Theoretische Informatik
FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Priv.-Doz. Dr. rer. nat. habil. K.-H. Niggl

Wiederholungsklausur „Algorithmentheorie“ WS 07/08

11. Februar 2008

NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein.

Name, Vorname:
Studiennummer und Matrikel:

Code

abgegeben: **2 Aufgabenblätter**
… **eigene Blätter**

Einsichtnahme

Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Ges.
erreichbare Punktzahl	30	12	13	10	14	10	11	100
erreichte Punktzahl								

Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Aufgabe 1 (Fragenkatalog zur Vorlesung) [30 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 30 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ an.
Bewertung: Ist C die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl P der erzielten Punkte aus $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C-10\}$. Insbesondere: Kein Kreuz wird als falsche Antwort gewertet.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede** Turingmaschine M korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn M auf Eingabe x hält, dann gilt $|f_M(x)| \le |x| + t_M(x)$.
[ ] [ ] Wenn M $p(n)$-platzbeschränkt ist, für ein Polynom $p(n)$, dann ist M polynomialzeitbeschränkt.
[ ] [ ] Wenn M auf Eingabe x hält, dann gilt $s_M(x) \le t_M(x)$.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jedes** RAM-Programm P korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] P benutzt eine feste, aus dem Programmtext ablesbare Auswahl von Registern.
[ ] [ ] Hält P auf a mit Registerbelegung φ, so gilt $f_P(a) = (\langle R_1\rangle, \langle R_2\rangle, \dots, \langle R_{\varphi(0)}\rangle)$.
[ ] [ ] Nach Ausführung von t Schritten von P auf Eingabe $(a_0, \dots, a_{n-1})$ enthält jedes Register eine Zahl $\le (c+a_1+\dots+a_{n-1})^{2^t}$, für eine Konstante $c > 0$.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede** Sprache L korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] L ist rekursiv aufzählbar ($r.a.$) $\iff$ $L = H_M$ für eine Turingmaschine M.
[ ] [ ] Wenn $L \subseteq \{0, \dots, 9\}^*$ gilt und L einen kanonischen Aufzähler besitzt, dann kann c_L durch ein stets haltendes RAM-Programm berechnet werden.
[ ] [ ] Wenn L keinen index-kanonischen Aufzähler besitzt, dann ist L oder $\overline{L}$ nicht r.a..

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **alle** Sprachen L, L' korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Sind L, L' rekursiv aufzählbar, so auch $((L^* \cap L') \cup LL') \setminus L$.
[ ] [ ] Wenn $L = L_M$ für eine $t(n)$-zeitbeschränkte NTM M gilt, dann ist L rekursiv.
[ ] [ ] Wenn $L = L_M$ für eine NTM M gilt, dann ist L rekursiv aufzählbar.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede** Sprache L korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn $L \neq L_M$ für jede $O(n)$-zeitbeschränkte TM M gilt, dann ist L nicht regulär.
[ ] [ ] Wenn $L \neq L_M$ für jeden LBA M gilt, dann ist L nicht kontextsensitiv.
[ ] [ ] Ist G eine Chomsky-0-Grammatik, so gilt $L(G) \neq \overline{H}$.

(f) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn $\overline{K} \leq L$ gilt, dann ist L nicht rekursiv.
[ ] [ ] Wenn $L \leq L'$ gilt und L rekursiv aufzählbar ist, dann ist L' rekursiv aufzählbar.
[ ] [ ] Wenn $L \leq H$ gilt, dann ist L rekursiv aufzählbar.

(g) Welche der folgenden Sprachen ist/sind rekursiv?

JA NEIN
[ ] [ ] $\{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ hat die Form } \langle M \rangle y\}$
[ ] [ ] $\{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ hat die Form } \langle M \rangle \text{ und es gilt } x \notin H_M\}$
[ ] [ ] $\{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ hat die Form } \langle M \rangle y \text{ und es gilt: } y \in H_M \implies t_M(y) \leq 2^{|y|}\}$

(h) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn H rekursiv wäre, dann existierte trotzdem eine r.a., nicht rekursive Sprache.
[ ] [ ] Für jede nichttriviale Eigenschaft $\mathcal{E}$ von r.a. Sprachen gilt: $L_{\mathcal{E}}$ oder $\overline{L_{\mathcal{E}}}$ ist r.a..
[ ] [ ] Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ gilt, dann gilt SAT $\leq_p \{1\}$.

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Wenn $L \leq_p L'$, $L' \leq_p L''$ und $L \notin \mathbf{NP}$ gilt, dann gilt $L'' \notin \mathbf{NP}$.
[ ] [ ] Wenn 3-SAT $\leq_p L$ gilt, dann ist L **NP**-vollständig.
[ ] [ ] Wenn 3-SAT $\leq_p L$ und $L \leq_p$ SAT gilt, dann ist L **NP**-vollständig.

(j) Wenn $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ gilt, welche der folgenden Aussagen ist/sind dann korrekt?

JA NEIN
[ ] [ ] Es gilt nicht SAT $\leq_p$ 3-SAT.
[ ] [ ] SAT besitzt einen Polynomialzeitalgorithmus.
[ ] [ ] $\mathbf{NPC} \cap \mathbf{P} = \emptyset$

Aufgabe 2 (Definitionen von Begriffen aus der Vorlesung) [$12 = 1 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2$ Punkte]

Definieren Sie

(a) den Begriff f *ist eine (total) rekursive Funktion*

(b) den Begriff U *ist eine universelle Turingmaschine*

(c) die *Haltesprache* H und die *Selbstanwendungssprache* K

(d) die *Sprachklasse* **NP**

(e) die Relation $L \leq_p L'$ (für $L \subseteq \Sigma^*$ und $L' \subseteq \Delta^*$)

(f) $L \in \mathbf{NPC}$ (für $L \subseteq \Sigma^*$).

Aufgabe 3 (Sätze aus der Vorlesung) [$13 = 4 + 4 + 2 + 3$ Punkte]

(a) Seien M und $\overline{M}$ zwei 1-Band-Turingmaschinen mit $L_{\overline{M}} = \overline{L}$, wobei $L := L_M \subseteq \Sigma^*$.
Beschreiben Sie die Arbeitsweise einer stets haltenden (mit Beweis!) 2-Band-Turingmaschine M' mit $L_{M'} = L$.

(b) Beweisen Sie (in drei Zeilen) ohne Reduktionsmethode oder Satz von Rice die Aussage:

$$\overline{K} \text{ ist nicht rekursiv aufzählbar.}$$

(c) Zeigen Sie (in zwei Zeilen): $\overline{K} \leq \overline{H}$

(d) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine nichttriviale Sprache und $L' \subseteq \Delta^*$ eine Sprache in **P**.
Zeigen Sie: $L' \leq_p L$

Aufgabe 4 (Konstruktion einer Turingmaschine) [10 Punkte]

Konstruieren Sie eine 1-Band-Turingmaschine $M = (Q, \{0, 1, \#, B\}, \{0, 1\}, B, q_0, F, \delta)$ für die Sprache

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}.$$

Geben Sie dabei Q und F an, sowie δ als Übergangstabelle.

Hinweis: Man kommt mit fünf Zuständen aus!

Aufgabe 5 (Abschlußeigenschaften von r.a. Sprachen mittels Determinismus) [14 Punkte]

Sei eine beliebige 1-Band-Turingmaschine $M = (Q, \Gamma, \{0, 1\}, B, q_0, F, \delta)$ fest gegeben.

Beschreiben Sie präzise die Arbeitsweise einer Mehrband-TM M' mit $L_{M'} = \text{Teilwort}(M)$, wobei

$$\text{Teilwort}(M) := \{x \in \{0, 1\}^* \mid \exists \text{ Teilwort } u \neq \varepsilon \text{ von } x \text{ mit } u \in L_M\}.$$

Hinweis: Es ist **nicht** vorausgesetzt, daß M stets hält!

<u>Aufgabe 6</u> (Nachweis der Nichtrekursivität von Sprachen) [$10 = 3 + 7$ Punkte]

(a) Formulieren Sie den *Satz von Rice* in der Version für Sprachen.

(b) Beweisen Sie mittels (Schema zum) *Satz von Rice*, daß folgende Sprache L nicht rekursiv ist.

$$L := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält höchstens auf Binärstrings } x \text{ mit } |x|_0 = 2\}$$

<u>Aufgabe 7</u> (Unbeschränkte Reduktionen) [11 Punkte]

Betrachten Sie die Sprache

$$L_0 := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf allen Binärstrings der Form } \mathrm{bin}(2^n)\}.$$

Zeigen Sie (sorgfältig): $\overline{H} \leq L_0$

Viel Erfolg!