

## Wiederholungsklausur „Logische Strukturen“ WS 07/08

28. Februar 2008

**NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!**

**Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Vornamen, Studiennummer und Matrikel ein.**

Name, Vorname:

Studiennummer und Matrikel:

Code
------

**abgegeben:      2 Aufgabenblätter**  
                           ... eigene Blätter

Einsichtnahme
Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Ges.
erreichbare Punktzahl	30	13	10	8	11	10	18	100
erreichte Punktzahl								

**Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.**

**Aufgabe 1** (Fragenkatalog zur Vorlesung)

[30 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden 30 Fragen entweder „JA“ oder „NEIN“ an.

**Bewertung:** Ist  $C$  die Anzahl der richtigen Antworten, so errechnet sich die Anzahl  $P$  der erzielten Punkte aus  $P := \frac{3}{2} \cdot \max\{0, C - 10\}$ . Insbesondere: Kein Kreuz wird als falsche Antwort gewertet.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für aussagenlogische Formeln  $F$  korrekt?

JA    NEIN

- Die Variablen von  $F$  tragen ihre (Wahrheits-) Werte stets mit sich.
- $F$  ist entweder erfüllbar oder  $F \rightarrow \perp$  ist eine Tautologie.
- Der (Wahrheits-) Wert von  $F$  kann i.a. nur bei Vorliegen einer Belegung der in ihr vorkommenden Variablen bestimmt werden.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für aussagenlogische Formeln  $F$  korrekt?

JA    NEIN

- Der Wert von  $F$  unter einer Belegung  $\sigma$  hängt nur von  $\sigma$  auf  $\text{Var}(F)$  ab.
- Der Wert von  $F$  unter  $\sigma$  bestimmt sich aus den Werten aller Teilformeln unter  $\sigma$ .
- Aus  $G \equiv H$  folgt i.a. nicht  $F[H/G] \equiv F$ .

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

JA    NEIN

- Jede aussagenlogische Formel in  $n$  Variablen definiert eine Funktion  $f \in \mathcal{B}_n$ .
- Boolesche Funktionen sind die funktionale Interpretation der aussagenlogischen Formeln.
- Aus der Wertetabelle für ein  $f \in \mathcal{B}_n$  kann man direkt die  $f$  definierende ausgezeichnete KNF( $f$ ) ablesen.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für eine Menge  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$  korrekt?

JA    NEIN

- Sind die Funktionen in  $\mathcal{C}$  weder sämtlich selbstdual noch sämtlich monoton noch sämtlich linear noch sämtlich 1-erhaltend, so ist  $\mathcal{C}$  eine Basis.
- Ist  $\mathcal{C}$  eine Basis, so existiert eine Basis  $B \subseteq \mathcal{C}$  mit maximal fünf Elementen.
- Sind alle Funktionen in  $\mathcal{C}$  selbstdual, so auch jede aus  $\mathcal{C}$  explizit definierte Funktion.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede prädikatenlogische Formel**  $A$  richtig?

JA NEIN

- Es existiert eine aussagenlogische KNF-Formel  $A'$  mit  $A' \equiv A$ .  
  Ist  $A$  eine Primformel, so besitzt  $A$  die Gestalt  $p(t_1, \dots, t_n)$ , für ein  $n$ -stelliges Prädikatensymbol  $p$  und bestimmte Terme oder Formeln  $t_1, \dots, t_n$ .  
   $A$  ist ein wohlgeformter Ausdruck, der aus Prädikatensymbolen mittels der Symbole  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall x_i, \exists x_j$  sowie runden Klammern aufgebaut ist.

(f) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede prädikatenlogische Formel**  $A$  richtig?

JA NEIN

- Der (Wahrheits-) Wert von  $A$  kann bei Vorliegen einer Trägermenge  $D$  sowie einer Belegung  $\varphi: \text{FV}(A) \rightarrow D$  bestimmt werden.  
   $A$  ist gültig, falls  $\mathcal{M} \models A$  für eine Struktur  $\mathcal{M}$  für die Sprache von  $A$  gilt.  
  Falls  $\mathcal{M} \models A$  aus  $\mathcal{M} \models \Gamma$  folgt, für jede Struktur  $\mathcal{M}$ , so gilt  $\Gamma \models A$ .

(g) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede prädikatenlogische Formel**  $A$  richtig?

JA NEIN

- Man kann  $A$  äquivalent schreiben als  $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B$  mit Quantoren  $Q_1, \dots, Q_n$  und Kern  $B$  in DNF, dessen Literale Primformeln oder negierte Primformeln sind.  
  Man kann  $A$  in eine geschlossene Formel  $A' = \exists y_1 \dots \exists y_n \forall x_1 \dots \forall x_m B$  mit quantorenfreiem Kern  $B$  umformen, sodaß  $A$  erfüllbar ist gdw.  $A'$  erfüllbar ist.  
  Man kann  $A$  in eine geschlossene Formel  $\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x_1 \dots \exists x_m B$ ,  $B$  quantorenfrei, umformen, sodaß  $A$  gültig ist gdw.  $\exists y_1 \dots \exists y_n \forall x_1 \dots \forall x_m \neg B$  erfüllbar ist.

(h) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jedes Axiomensystem**  $S$  und **jede geschlossene Formel**  $A$  richtig?

JA NEIN

- Wenn der Suchbaum für ein Gegenbeispiel zu  $S \vdash A$  geschlossen ist, dann findet man eine Herleitung von  $A$  aus Annahmen in  $S$ .  
  Wenn  $\vdash A$  gilt, dann ist  $A$  (allgemein-) gültig.  
  Wenn der Suchbaum für ein Gegenbeispiel zu  $S \vdash A$  nicht geschlossen ist, dann existiert ein unendlicher Pfad  $\alpha$ , aus dem man eine Termstruktur  $\mathcal{M}_\alpha$  mit  $\mathcal{M}_\alpha \models S$  und  $\mathcal{M}_\alpha \not\models A$  definieren kann.

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

JA NEIN

- Besitzt ein Axiomensystem  $S$  überhaupt ein Modell, so auch ein abzählbares.  
  Besitzt ein Axiomensystem  $S$  kein Modell, so existiert bereits eine endliche Teilmenge von  $S$ , die kein Modell besitzt.  
  Wenn  $\vdash \exists \vec{x} A$  gilt, dann existieren endlich viele Termtupel  $\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_m$ , sodaß die Formel  $A[\vec{t}_1/\vec{x}] \vee \dots \vee A[\vec{t}_m/\vec{x}]$  (allgemein-) gültig ist.

(j) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede endliche prädikatenlogische Klauselmeng**e  $F$  richtig?

JA NEIN

- Der Unifikationsalgorithmus von Robinson entscheidet, ob eine gegebene Menge von Ausdrücken unifizierbar ist und berechnet ggf. einen allgemeinsten Unifikator.  
  Wenn  $\square$  eine Resolutionsherleitung aus  $F$  besitzt, dann gilt  $\vdash \forall \text{FV}(F) \neg F$ .  
  Wenn  $\square$  keine Resolutionsherleitung aus  $F$  besitzt, dann ist  $F$  erfüllbar.

**Aufgabe 2** (Definitionen von Begriffen aus der Vorlesung) [13=3+2+3+1+1+3 Punkte]

Definieren Sie die folgenden Begriffe (für eine Sprache  $\mathcal{L}$  erster Stufe):

- (a)  $\mathcal{M}$  ist eine Struktur für  $\mathcal{L}$
- (b)  $\llbracket t \rrbracket_{\varphi}^{\mathcal{M}}$  (Wert eines Terms in  $\mathcal{M}$  unter  $\varphi$ ), für eine Interpretation  $(\mathcal{M}, \varphi)$  für  $\mathcal{L}$
- (c)  $\mathcal{M} \models A[\varphi]$  (in  $\mathcal{M}$  gilt  $A$  unter  $\varphi$ ) für Primformeln  $A = p(t_1, \dots, t_n)$  und Existenzformeln  $A = \exists x B$ , für eine beliebige Interpretation  $(\mathcal{M}, \varphi)$  für  $\mathcal{L}$
- (d)  $\mathcal{M} \models A$  ( $\mathcal{M}$  ist Modell von  $A$ ), für eine Struktur  $\mathcal{M}$  für  $\mathcal{L}$
- (e)  $A$  ist erfüllbar, für eine Formel  $A$  über  $\mathcal{L}$
- (f)  $d$  ist Herleitung der Formel  $\forall x A$  mit freien Annahmen  $\text{FA}(d)$  via  $\forall$ -Einführung.

**Aufgabe 3** (Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe) [10 Punkte]

Betrachten Sie die Existenzformel  $\exists x A$  mit Kern

$$A := (\exists x p(x)) \rightarrow p(x)$$

für ein 1-stelliges Prädikatensymbol  $p$  und ein 1-stelliges Funktionssymbol  $f$ .

Zeigen Sie ohne Angabe einer Herleitung:  $\models \exists x A$

**Hinweis:** Für eine beliebige Interpretation  $(\mathcal{M}, \varphi)$  der Sprache  $\mathcal{L}$  von  $A$  unterscheide man die Fälle (1) Es existiert ein  $a \in D^{\mathcal{M}}$  mit  $a \in p^{\mathcal{M}}$  und (2) Für alle  $a \in D^{\mathcal{M}}$  gilt  $a \notin p^{\mathcal{M}}$ . Im Fall (2) benötigt man an geeigneter Stelle das Koinzidenzlemma.

**Aufgabe 4** (Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe) [8 Punkte]

Seien  $f_1, \dots, f_m$  und  $p_1, \dots, p_n$  die Funktionssymbole bzw. Prädikatensymbole einer gegebenen Sprache  $\mathcal{L}$  erster Stufe. Betrachten Sie nun eine Disjunktion  $D = (L_1 \vee \dots \vee L_{l+2})$  aus prädikatenlogischen Literalen  $L_i$  (eine Primformel oder eine negierte Primformel über  $\mathcal{L}$ ) mit der Eigenschaft:

(\*) Kein  $L_i$  in  $D$  ist die Negation eines  $L_j$  in  $D$ .

Vervollständigen Sie geeignet die folgende (Term-) Struktur  $\mathcal{M}$  für  $\mathcal{L}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= (\text{Menge der Terme über } \mathcal{L}; f_1^{\mathcal{M}}, \dots, f_m^{\mathcal{M}}; p_1^{\mathcal{M}}, \dots, p_n^{\mathcal{M}}) \\ f_i^{\mathcal{M}} &:= f_i, \text{ für } i = 1, \dots, m \\ p_j^{\mathcal{M}} &:= ?, \text{ für } j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

und zeigen Sie dafür mittels (\*) bzgl. der identischen Belegung  $\text{id}(x) := x$  die Aussage:

$$\mathcal{M} \not\models D[\text{id}]$$

**Hinweis:** Für die gesuchte Interpretation  $p_j^{\mathcal{M}}$  kläre man zunächst die Frage  $\llbracket t \rrbracket_{\text{id}}^{\mathcal{M}} = ?$ , für einen beliebigen Term  $t$  über  $\mathcal{L}$ , und definiere dann „ $\vec{t} \in p_j^{\mathcal{M}}$ “ geeignet durch eine syntaktische Bedingung an  $D$ .

**Aufgabe 5** (Herleitungen im Kalkül des natürlichen Schließens) [11=4+7 Punkte]

Zeigen Sie folgende Aussagen durch Angabe einer Herleitung im Kalkül des natürlichen Schließens, basierend auf Minimallogik:

- (a)  $\vdash A, \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$   
 (b)  $\vdash \exists x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \exists x B)$ , für  $x \notin \text{FV}(A)$

**Hinweis:** Verwenden Sie (a) als *abgeleitete Regel* (wie z.B. (IB)) in der Herleitung für (b).

**Aufgabe 6** (Suchbaum für ein Gegenbeispiel zu  $S \vdash A$ ) [10 Punkte]

Betrachten Sie die Formeln  $A_1 := \neg p$  und  $A := p \rightarrow q$ , für 0-stellige Prädikatensymbole  $p, q$ .

Konstruieren Sie den Suchbaum für ein Gegenbeispiel zu  $\{A_1\} \vdash A$  bezüglich der folgenden Aufzählung der Teilformeln von  $A_1$  und  $A$ :

$$D_0 := p, D_1 := p \rightarrow q, D_2 := \neg p, D_3 := q \text{ und } D_4 := \perp$$

Notieren Sie dabei an den geschlossenen Pfaden den/einen dafür begründenden *Fall* (1.,2.,3.).

**Aufgabe 7** (Aussagenlogische Resolution und Unifikation) [18=10+4+4 Punkte]

- (a) Man betrachte die folgenden aussagenlogischen Formeln:

$$\begin{aligned} F_1 &:= \neg B \rightarrow \neg C \\ F_2 &:= (\neg A \rightarrow \neg(B \wedge C)) \wedge (B \rightarrow \neg A) \\ F_3 &:= (D \wedge C) \rightarrow \neg B \end{aligned}$$

Zeigen Sie mittels aussagenlogischer Resolution:

$$\{F_1, F_2\} \models F_3 \quad (F_3 \text{ ist eine logische Folgerung aus } F_1 \text{ und } F_2.)$$

**Hinweis:** Bringen Sie zunächst  $F_1, F_2, F_3$  jeweils in konjunktive Normalform und bilden daraus geeignet eine Klauselmengemenge  $\Gamma$  mit:  $\{F_1, F_2\} \models F_3$  gdw.  $\Gamma$  ist unerfüllbar. Nun „basteln“ Sie eine Resolutionsherleitung von  $\square$  aus  $\Gamma$ .

- (b) Für Prädikatensymbole  $p, q$  mit Stelligkeit 2 bzw. 3 sowie 1-stellige Funktionssymbole  $f, g$  und eine Konstante  $a$  seien die Mengen  $M$  und  $M'$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} M &:= \{p(a, f(x)), p(y, f(g(x)))\} \\ M' &:= \{q(f(x), a, g(f(y))), q(f(a), x, g(z))\} \end{aligned}$$

Wenden Sie den Robinsonschen Unifikationsalgorithmus auf beide Mengen an und bestimmen Sie dabei einen *MGU* im Falle der Unifizierbarkeit.

**Viel Erfolg!**