



## Klausur „Berechenbarkeit und Komplexität“ SS 2009

**Bachelor**

19. August 2009

**NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!**

Heften Sie die Blätter bei Abgabe zusammen, und tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Vornamen, Ihre Studiennummer und Matrikel ein.  
 Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner oder Mobiltelefone, zugelassen.

Arbeitszeit 90min

Name, Vorname:  
 Studiennummer und Matrikel:

Code
------

**abgegeben:**      **2 Aufgabenblätter**  
                           **... eigene Blätter**

Einsichtnahme
Datum, Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Ges.
erreichbare Punktzahl	18	13	16	10	16	17	90
erreichte Punktzahl							

### Aufgabe 1

[18 Punkte]

Bitte kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „JA“ oder „NEIN“ an.

**Bewertung:** Ist  $R$  die Anzahl der richtigen und  $F$  die Anzahl der falschen Antworten, so errechnet sich die Anzahl  $P$  der erzielten Punkte aus  $P := \max\{0, R - F\}$ .

(a) Sind die folgenden Aussagen für jedes RAM-Programm  $P$  korrekt?

JA    NEIN

Wenn  $P$  auf Eingabe  $(a_1, \dots, a_n)$  hält, dann steht die Ausgabe in den Registern  $R_1, R_3, \dots, R_{2\lfloor R_0 \rfloor - 1}$ .

$P$  benutzt eine feste Anzahl von Registern, die man aus dem Programm ablesen kann.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für **jede** TM  $M$  korrekt?

JA    NEIN

Wenn  $M$  auf Eingabe  $x$  hält, dann gilt  $|f_M(x)| \leq t_M(x) + |x|$ .

Wenn  $M$  auf Eingabe  $x$  hält, dann gilt  $t_M(x) \leq s_M(x)$ .

(c) Sind die folgenden Aussagen korrekt?

JA NEIN

Ist  $L = L_M$  für eine NTM  $M$ , so ist  $L$  rekursiv aufzählbar.

Wenn  $L$  kontextsensitive Sprache ist, dann ist  $L$  rekursiv.

(d) Sind die folgenden Aussagen korrekt?

JA NEIN

Für alle Sprachen  $L$  bzw.  $L'$  gilt: wenn  $L \leq L'$  und  $L'$  ist rekursiv aufzählbar, dann ist auch  $L$  rekursiv aufzählbar.

Sind  $L$  und  $L'$  rekursiv aufzählbar, so auch  $(L \cup L')^*$ .

(e) Sind die folgenden Aussagen korrekt?

JA NEIN

Die Sprache  $L = \{\langle M \rangle \mid H_M = \Sigma^*\}$  ist rekursiv.

Für alle Sprachen  $L$  gilt: wenn  $\overline{H} \leq L$ , dann ist  $L$  nicht rekursiv aufzählbar.

(f) Sind die folgenden Aussagen korrekt?

JA NEIN

Zu einem gegebenen ASCII-Text  $P$  kann man entscheiden, ob  $P$  ein syntaktisch korrektes Java-Programm ist.

Zu zwei gegebenen C-Programmen  $P$  und  $P'$  kann man entscheiden, ob  $P$  und  $P'$  das gleiche Ein-/Ausgabeverhalten besitzen.

(g) Sind die folgenden Aussagen stets korrekt?

JA NEIN

Nach dem Satz von Cook/Levin ist das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln in konjunktiver Normalform NP-vollständig.

Wenn  $P \neq NP$ , dann gilt  $NP \cap P \neq \emptyset$ .

(h) Sind die folgenden Aussagen stets korrekt?

JA NEIN

$L_{\text{Rucksack}} \leq_p L \Rightarrow L \in NPC$

$L \in NP, L \leq_p L_{\text{Rucksack}} \Rightarrow L \in NPC$

(i) Sind die folgenden Aussagen stets korrekt?

JA NEIN

$L \in NP$  und  $L_{\text{Clique}} \leq_p L \Rightarrow L$  ist NP-vollständig.

Wenn  $P \neq NP$ , dann gibt es für das Traveling-Salesperson-Problem keinen Polynomialzeitalgorithmus.

**Aufgabe 2** (Definitionen und grundlegende Konzepte)

[13 Punkte]

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe und Konzepte (wie in der Vorlesung) an!

- (a)  $f: D \rightarrow R$  ist partiell rekursiv. [2 P.]
- (b) TM  $M$  ist  $s(n)$ -platzbeschränkt. [2 P.]
- (c) Menge  $\mathcal{K}_M$  aller Konfigurationen einer TM  $M$ . [2 P.]
- (d) Die Klasse NP. [3 P.]
- (e)  $L$  ist NP-vollständig. [2 P.]
- (f) Die KNF-Formel  $\varphi$  ist erfüllbar. [1 P.]
- (g)  $L_{\text{SAT}}$  [1 P.]

**Aufgabe 3** ( $L_{\text{Subgraph-Iso}} \in \text{NPC}$ )

[16 Punkte]

Erinnerung:

Ein Element von  $L_{\text{Clique}}$  repräsentiert einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine natürliche Zahl  $k$ , sodass  $G$  eine Clique  $V' \subseteq V$  der Größe  $k$  besitzt, d. h.,  $|V'| = k$  und je zwei verschiedene Knoten  $u$  und  $v$  aus  $V'$  sind in  $G$  durch eine Kante verbunden. Formal gilt:

$$L_{\text{Clique}} := \{(G, k) \mid G = (V, E) \text{ Graph, } k \in \mathbb{N} \text{ mit:} \\ \exists V' \subseteq V: (|V'| = k) \text{ und } (\forall u, v \in V': u \neq v \Rightarrow (u, v) \in E)\}$$

Ein Element von  $L_{\text{Subgraph-Iso}}$  repräsentiert zwei Graphen  $G_1$  und  $G_2$  derart, dass  $G_1$  bis auf Isomorphie ein Teilgraph von  $G_2$  ist. Formal gilt:

$$L_{\text{Subgraph-Iso}} := \{(G_1, G_2) \mid G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2) \text{ Graphen mit} \\ \exists g: V_1 \rightarrow V_2 \text{ injektiv, sodass } \forall u, v \in V_1: (u, v) \in E_1 \Rightarrow (g(u), g(v)) \in E_2\}$$

Zeigen Sie:

- (a)  $L_{\text{Subgraph-Iso}} \in \text{NP}$  [8 P.]
- (b)  $L_{\text{Clique}} \leq_p L_{\text{Subgraph-Iso}}$  [8 P.]

**Aufgabe 4** (Simulation von RAM-Programmen durch Turingmaschinen)

[10 Punkte]

Erklären Sie, wie die Simulation des RAM-Befehls

$$1: \text{ if } (R_8 = 0) \text{ goto } 17$$
auf einer TM abläuft, wenn  $l - 1 \geq 17$  ist. Was ändert sich, wenn  $l - 1 \leq 16$  ist?

**Aufgabe 5** (Rekursive und nicht rekursive Sprachen)

[16 Punkte]

Formulieren Sie den Satz von Rice in der Variante für Funktionen.

[4 P.]

Zeigen Sie dann:

(a)  $\{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet stets } (0, 0, 0)\}$  ist nicht rekursiv. [7 P.]

(b)  $\{\langle M \rangle \mid t_M(1) < 4711\}$  ist rekursiv. ( $t_M(x)$  ist die Anzahl der Schritte, die  $M$  auf  $x$  macht.) [5 P.]

*Hinweis: Universelle TM.*

**Aufgabe 6** (Sätze aus der Vorlesung)

[17 Punkte]

(a) Beweisen Sie, dass  $L_1 \cup L_2$  rekursiv aufzählbar ist, wenn  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  rekursiv aufzählbar sind. [5 P.]

(b) Definieren Sie die Sprache  $K$ . [1 P.]

(c) Beweisen Sie, dass  $K$  rekursiv aufzählbar ist. [5 P.]

(d) Beweisen Sie, dass  $\overline{K}$  nicht r. a. ist. [6 P.]

**Viel Erfolg!**