2.3 Reguläre Ausdrücke

DFAs und NFAs sind Beschreibungsmöglichkeiten für reguläre Sprachen. Gezeichnet sind sie sehr intuitiv, aber für Algorithmen schwer zu verwenden. Als Tupel angegeben sind sie für Menschen schwer verständlich.

Ziel: Eine textuelle Beschreibung regulärer Sprachen.

Definition. Sei Σ ein Alphabet.

1. Die Zeichenketten $\varnothing$, λ und a für $a \in \Sigma$ sind *reguläre Ausdrücke über* Σ.

2. Sind r_1 und r_2 reguläre Ausdrücke über Σ, so auch die Zeichenketten $(r_1 + r_2)$, $(r_1 r_2)$ und (r_1^*).

3. Nichts ist ein regulärer Ausdruck über Σ, was sich nicht in endlich vielen Schritten nach 1 und 2 erzeugen läßt.

Beispiel.
Sind $0, 1 \in \Sigma$, so sind $((((0 + 1)^*)0)1)$ und $((\varnothing + \varnothing)^*)$ reguläre Ausdrücke über Σ.

Jeder reguläre Ausdruck r ist also ein Wort über dem Alphabet

$$\Sigma \cup \{\varnothing, \lambda, +,^*, (,)\}.$$

Er bezeichnet eine Sprache $L(r)$ über Σ:

Definition. 1. $L(\varnothing) = \emptyset$, $L(\lambda) = \{\varepsilon\}$ und $L(a) = \{a\}$ für alle $a \in \Sigma$.

2. $L((r_1 + r_2)) = L(r_1) \cup L(r_2)$, $L((r_1 r_2)) = L(r_1) \cdot L(r_2)$ und $L((r_1^*)) = L(r_1)^*$.

Damit ist ein regulärer Ausdruck r ein „Name" für die Sprache $L(r)$.

Beispiel.

$$\begin{aligned}
L(((((0+1)^*)0)1)) &= \{0,1\}^* \cdot \{01\} \\
L(((\varnothing + \varnothing)^*)) &= L((\varnothing + \varnothing))^* \\
&= (L(\varnothing) \cup L(\varnothing))^* \\
&= (\emptyset \cup \emptyset)^* \\
&= \emptyset^* = \{\varepsilon\} = L(\lambda)
\end{aligned}$$

Fragen:

(1) Welche Sprachen haben einen Namen, d.h. für welche Sprachen L existiert ein regulärer Ausdruck r mit $L = L(r)$?

(2) Gibt es Algorithmen mit

  (a) Eingabe: regulärer Ausdruck r und $u \in \Sigma^*$
  Frage: gilt $u \in L(r)$?

  (b) Eingabe: reguläre Ausdrücke r_1 und r_2
  Frage: Gilt $L(r_1) \subseteq L(r_2)$?

(3) Gibt es zu jedem regulären Ausdruck r einen regulären Ausdruck r' mit $L(r') = \Sigma^* \setminus L(r)$? Kann man ggf. r' aus r berechnen?

Satz 2.13 (Antwort auf Frage (1))**.** *Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Die Sprache L ist genau dann regulär, wenn es einen regulären Ausdruck r gibt mit $L = L(r)$.*

Beweis durch Beispiel:
(nur Richtung „$\Leftarrow$“)
Wir betrachten den regulären Ausdruck $r = ((((0+1)^*)0)1))$.

Die Sprachen $L(0) = \{0\}$ und $L(1) = \{1\}$ sind regulär

$\Longrightarrow L((0+1)) = L(0) \cup L(1) = \{0,1\}$ regulär (Lemma 2.5)

$\Longrightarrow L((0+1)^*) = L((0+1))^*$ regulär (Lemma 2.12)

$\Longrightarrow L(((0+1)^*)0) = L((0+1)^*) \cdot L(0)$ regulär (Lemma 2.11)

$\Longrightarrow L((((0+1)^*)0)1) = L((0+1)^*0) \cdot L(1)$ regulär (Lemma 2.11) $\square$

Satz 2.14 (Antwort auf Frage (2)). *Es gibt Algorithmen mit*

(a) Eingabe: regulärer Ausdruck r und $u \in \Sigma^*$
Frage: gilt $u \in L(r)$?

(b) Eingabe: reguläre Ausdrücke r_1 und r_2
Frage: Gilt $L(r_1) \subseteq L(r_2)$?

BewIdee:

(a) berechne aus r einen NFA M mit $L(r) = L(M)$ (verwendet Satz 2.13) und dann einen DFA M' mit $L(M') = L(M) = L(r)$ (verwendet Lemma 2.10). Teste, ob $u \in L(M')$.

(b) Berechne wie in (a) DFAs M_1 und M_2 mit $L(M_1) = L(r_1)$ und $L(M_2) = L(r_2)$.

Berechne DFA M_{12} mit $L(M_{12}) = L(M_1) \setminus L(M_2) = L(M_1) \cap \Sigma^* \setminus L(M_2)$ (verwendet Lemmas 2.4 und 2.6)

Teste, ob $L(M_{12}) \neq \emptyset$, d.h. ob in M_{12} ein Finalzustand vom Initialzustand aus erreichbar ist (z.B. durch Breitensuche). Wenn ja, so gilt $L(M_1) \not\subseteq L(M_2)$, ansonsten gilt $L(M_1) \subseteq L(M_2)$

□

Satz 2.15 (Antwort auf Frage (3))**.** *Sei r ein regulärer Ausdruck über Σ. Dann existiert ein regulärer Ausdruck r' mit $L(r') = \Sigma^* \setminus L(r)$.*

BewIdee:
r regulärer Ausdruck

$\Longrightarrow$ es gibt DFA M mit $L(M) = L(r)$ (Satz 2.13)

$\Longrightarrow$ es gibt DFA M' mit $L(M') = \Sigma^* \setminus L(M)$ (Lemma 2.4)

$\Longrightarrow$ es gibt regulären Ausdruck r' mit $L(r') = L(M')$ (Satz 2.13)

Also gilt $L(r') = L(M') = \Sigma^* \setminus L(M) = \Sigma^* \setminus L(r)$. □

Zusammenfassung Für eine Sprache L sind äquivalent:

- L ist regulär
- L ist Sprache eines DFA
- L ist Sprache eines NFA
- L ist Sprache eines regulären Ausdrucks

2.4 Nicht-reguläre Sprachen

Fragen:

(1) Existiert eine Sprache, die nicht regulär ist?

(2) Wir haben viele Möglichkeiten, die Regularität einer Sprache zu zeigen (DFA, NFA, regulärer Ausdruck, Komplement einer bekanntermaßen regulären Sprache ...).

Aber wie kann man zeigen, daß eine Sprache nicht regulär ist?

Definition. für $w \in \Sigma^*$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $w^n = \underbrace{w\, w \cdots w}_{n \text{ mal}}$, insbes. $w^0 = \varepsilon$ und $w^1 = w$

Satz 2.16 (Pumpinglemma für reguläre Sprachen)**.** *Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann existiert $n > 0$, so daß für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt: es existieren Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ mit*

(i) $z = uvw$,

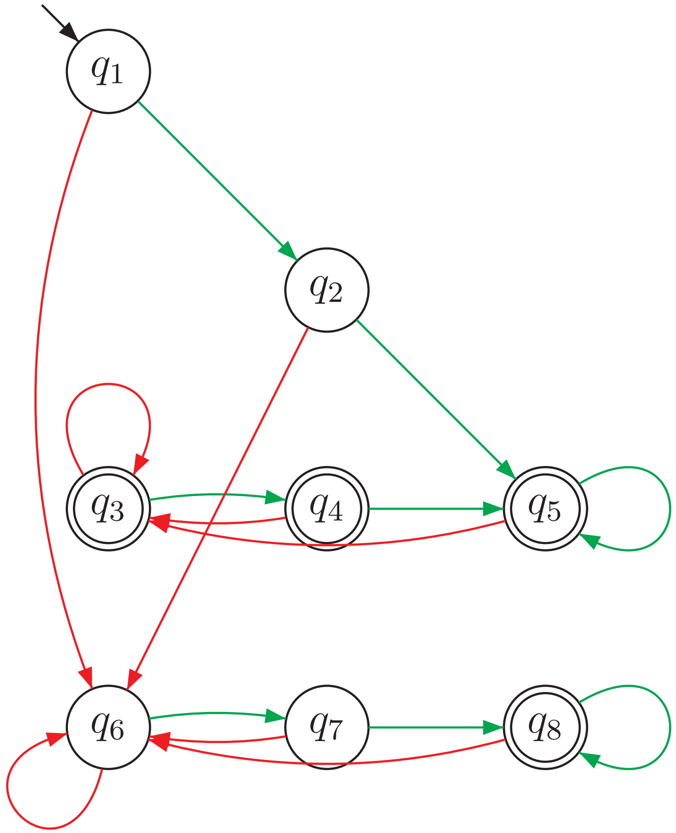
(ii) $|uv| \leq n$,

(iii) $|v| > 0$ *und*

(iv) *für alle* $m \in \mathbb{N}$ *gilt* $uv^m w \in L$.

Beweis durch Beispiel:

Sei L die Sprache des folgenden DFA mit 8 Zuständen (er akzeptiert die Menge aller Wörter, die mit gg beginnen oder mit gg enden):



zu zeigen ist:

$$\exists n \geq 1 \, \forall z \in L \text{ mit } |z| \geq n \, \exists u, v, w \in \Sigma^* \colon z = uvw, |uv| \leq n, |v| > 0, \forall m \colon uv^m w \in L$$

Setze $n = 8$ (Anzahl der Zustände von M).
Sei $z \in L(M)$ beliebig mit $|z| \geq n$, z.B. $z = rggrgrggrrgg$. Dann existiert $q \in F = \{q_3, q_4, q_5, q_8\}$ mit $\iota \xrightarrow{z} q$ (im Beispiel $q = q_8$). Auf diesem Pfad werden $|z| + 1 > 8$ Zustände besucht (im Beispiel 13), also gibt es Zustand $p \in \{q_1, \cdots, q_8\}$ (im Beispiel $p = q_6$), der sich unter den ersten 9 Zuständen wiederholt.
Also existieren Wörter u, v, w mit

$$z = uvw\,, \;\; \iota \xrightarrow{u} p \xrightarrow{v} p \xrightarrow{w} q \in F\,, \;\; |uv| \leq 8 \text{ und } |v| > 0\,.$$

(im Beispiel $u = r$, $v = ggr$ und $w = grggrrgg$)
Sei nun $m \geq 0$ beliebig. Dann gilt

$$\iota \xrightarrow{u} p \xrightarrow{v^m} p \xrightarrow{w} q \in F\,,$$

d.h. $uv^m w \in L(M)$. □

Mit dem Pumpinglemma für reguläre Sprachen kann gezeigt werden, daß bestimmte Sprachen nicht regulär sind.

Beispiel. Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{a^k b^k \mid k \geq 0\}$. Die Sprache L ist nicht regulär.

Beweis:
Angenommen, L wäre regulär. Nach dem Pumpinglemma existiert dann $n \geq 1$, so daß für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ existieren mit den Eigenschaften (i)-(iv) aus dem Pumpinglemma.
Betrachte das Wort $z = a^n b^n \in L$. Wegen $|z| = 2n \geq n$ existieren $u, v, w \in \Sigma^*$ mit (i)-(iv).
Damit können wir folgern:

- $uvw = z = a^n b^n$ (d.h. (i)) und $|uv| \leq n$ (d.h. (ii)) $\Longrightarrow |uv|_b = 0 \Longrightarrow |v|_b = 0$
- $|v| > 0$ (d.h. (iii)) $\Longrightarrow |v|_a > 0$

Mit $m = 0$ gelten also $|uv^m w|_b = |uw|_b = |uvw|_b = n$ und $|uv^m w|_a = |uw|_a < |uvw|_a = n$.
Damit folgt aber $uv^m w \notin L$, im Widerspruch zu (iv).
Also ist L nicht regulär. $\square$

Beispiel. Ähnlich kann man zeigen, daß die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

- $\{a^i b a^j b a^{i+j} \mid i, j \geq 0\}$
- $\{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$
- $\{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$
- $\cdots$

Beispiel. Die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i > 0 \Rightarrow j = k \geq 0\}$ ist nicht regulär, dies kann aber nicht mit dem Pumpinglemma gezeigt werden.

also Das Pumpinglemma gibt ein <u>notwendiges</u>, aber kein <u>hinreichendes</u> Kriterium für die Regularität einer Sprache an. Es kann daher nur genutzt werden um zu zeigen, daß eine Sprache <u>nicht</u> regulär ist.