3.2 Ableitungsbäume

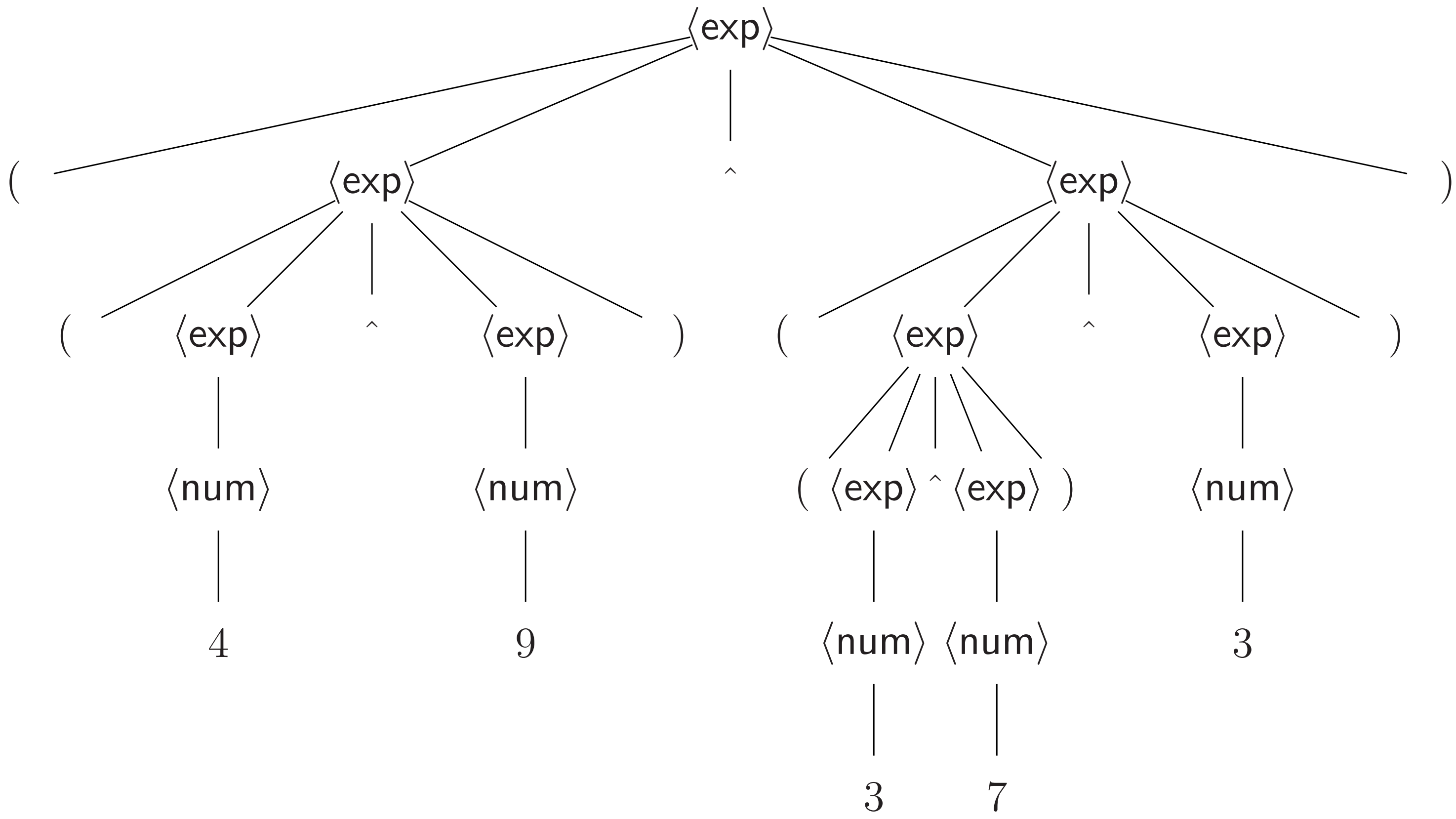
Wir betrachten als Beispiel die kontextfreie Grammatik G mit Startsymbol $\langle\mathsf{exp}\rangle$ und den Regeln

$$\langle\mathsf{num}\rangle \to 0 \mid 1 \mid 2 \cdots \mid 9 \qquad\qquad \langle\mathsf{exp}\rangle \to \langle\mathsf{num}\rangle \mid (\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle)$$

Sie hat z.B. die Ableitung

$$\begin{aligned}
\langle\mathsf{exp}\rangle &\Longrightarrow_G (\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle) && \Longrightarrow_G (\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }(\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle))\\
&\Longrightarrow_G (\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }(\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{num}\rangle)) && \Longrightarrow_G (\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }(\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }3))\\
&\Longrightarrow_G ((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle)\hat{\ }(\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }3)) && \Longrightarrow_G ((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle)\hat{\ }(\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }3))\\
&\Longrightarrow_G ((4\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle)\hat{\ }(\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }3)) && \Longrightarrow_G ((4\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle)\hat{\ }((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle)\hat{\ }3))\\
&\Longrightarrow_G ((4\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle)\hat{\ }((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle)\hat{\ }3)) && \Longrightarrow_G ((4\hat{\ }\langle\mathsf{num}\rangle)\hat{\ }((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{exp}\rangle)\hat{\ }3))\\
&\Longrightarrow_G ((4\hat{\ }\langle\mathsf{num}\rangle)\hat{\ }((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{\ }\langle\mathsf{num}\rangle)\hat{\ }3)) && \Longrightarrow_G ((4\hat{\ }\langle\mathsf{num}\rangle)\hat{\ }((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{\ }7)\hat{\ }3))\\
&\Longrightarrow_G ((4\hat{\ }9)\hat{\ }((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{\ }7)\hat{\ }3)) && \Longrightarrow_G ((4\hat{\ }9)\hat{\ }((3\hat{\ }7)\hat{\ }3))
\end{aligned}$$

Das Wort $((4\hat{\ }9)\hat{\ }((3\hat{\ }7)\hat{\ }3))$ gehört also zur von G erzeugten Sprache. Die Klammern in diesem Wort geben ihm eine „Struktur“, die wir in einem Baum veranschaulichen können. Dieser *Ableitungsbaum* entsteht aus der obigen Ableitung.


⟨exp⟩
(⟨exp⟩ ^ ⟨exp⟩)
(⟨exp⟩ ^ ⟨exp⟩) (⟨exp⟩ ^ ⟨exp⟩)
⟨num⟩ ⟨num⟩ (⟨exp⟩ ^ ⟨exp⟩) ⟨num⟩
4 9 ⟨num⟩ ⟨num⟩ 3
3 7

Um ihn zu konstruieren, geht man wie folgt vor:

- Initialisierung: erzeuge einen Knoten mit dem Startsymbol $S = \langle\mathsf{exp}\rangle$
- Für jeden Ableitungsschritt: Werde die Regel $A \to B_1 B_2 \cdots B_k$ angewandt.

  Der Knoten, der dem zu ersetzenden Nichtterminal A entspricht, bekommt k neue Kinder. Diese werden mit den Buchstaben B_1, B_2, ... B_k beschriftet.

Am Ende steht an den Blättern (von links nach rechts gelesen) das Wort ((4ˆ9)ˆ((3ˆ7)ˆ3)). Diese Wort heißt „Blattwort" des Ableitungsbaums.

Der angegebene Ableitungsbaum entsteht auch aus der Ableitung

$$
\begin{array}{llll}
\langle\mathsf{exp}\rangle & \Longrightarrow_G ((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle)) & & \Longrightarrow_G ((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle))) \\
& \Longrightarrow_G ((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}\langle\mathsf{num}\rangle))) & & \Longrightarrow_G ((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}3)) \\
& \Longrightarrow_G (((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle))\hat{}((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}3)) & & \Longrightarrow_G (((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle))\hat{}((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}3)) \\
& \Longrightarrow_G ((4\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle))\hat{}((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}3)) & & \Longrightarrow_G ((4\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle))\hat{}(((\langle\mathsf{exp}\rangle\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle))\hat{}3)) \\
& \Longrightarrow_G ((4\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle))\hat{}(((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle))\hat{}3)) & & \Longrightarrow_G ((4\hat{}\langle\mathsf{num}\rangle))\hat{}(((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{}\langle\mathsf{exp}\rangle))\hat{}3)) \\
& \Longrightarrow_G ((4\hat{}\langle\mathsf{num}\rangle))\hat{}(((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{}\langle\mathsf{num}\rangle))\hat{}3)) & & \Longrightarrow_G ((4\hat{}\langle\mathsf{num}\rangle))\hat{}(((\langle\mathsf{num}\rangle\hat{}7)\hat{}3)) \\
& \Longrightarrow_G ((4\hat{}\langle\mathsf{num}\rangle))\hat{}((3\hat{}7)\hat{}3)) & & \Longrightarrow_G ((4\hat{}9)\hat{}((3\hat{}7)\hat{}3))
\end{array}
$$

Aus jeder Ableitung kann also ein Ableitungsbaum gewonnen werden. Umgekehrt kann aus jedem Ableitungsbaum auch eine Ableitung gewonnen werden. Daher erhält man

Satz 3.3. *Sei* $G = (N, \Sigma, S, P)$ *eine kontextfreie Grammatik und* $w \in \Sigma^*$. *Dann sind äquivalent:*

(1) $w \in L(G)$

(2) Es gibt einen Ableitungsbaum mit Blattwort w.