Zwischenzusammenfassung:

- Wir hatten uns die Frage gestellt, ob alle entscheidbaren Probleme „effiziente“ Algorithmen besitzen. Im Angesicht der Komplexitätsklassen $\mathsf{EXPTIME}$ usw. schränken wir uns auf natürliche Probleme ein.
- Sehr viele natürliche Probleme liegen in der Komplexitätsklass NP.
- Die Frage, ob es für diese „effiziente“ Algorithmen gibt (d.h. ob sie vielleicht in P liegen), haben wir nicht beantwortet.

Wir werden zeigen: Hat man für eines der genannten Probleme SAT etc. eine „effiziente“ Lösung, so hat man „effiziente“ Lösungen für alle Probleme in NP.

Im Umkehrschluß gilt dann: Kann man zeigen, daß irgendein Problem aus NP *keine* „effiziente“ Lösung hat, so hat auch SAT keine „effiziente“ Lösung (analog für die anderen genannten Probleme).

Satz 5.6. *Sei $A \in \mathsf{NP}$. Dann gilt $A \leq_P \text{SAT}$.*

BewIdee:
Da $A \in \mathsf{NP}$ gilt, existiert eine NTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \iota, \delta, \Box, F)$, die A in nichtdet. Polynomialzeit entscheidet.

- Also existieren $c, d, e \in \mathbb{N}$, so daß M bei Eingabe von w nach $\leq d \cdot |w|^c + e$ vielen Schritten anhält. Setze $p(n) = d \cdot n^c + e + n$.

- Außerdem kann M bei Eingabe von w genau dann in einem akzeptierenden Zustand anhalten, wenn $w \in A$ gilt.

Wir drücken die Existenz einer akzeptierenden Berechnung bei Eingabe von w durch eine Formel φ_w aus. Hierzu benötigen wir sicher Aussagen der Form „zum Zeitpunkt t befindet sich die NTM M im Zustand q“ oder „zum Zeitpunkt t steht an der Stelle i des Bandes der Buchstabe a“.

Diese Formel φ_w verwendet daher die folgenden atomaren Formeln:

Atomformel	Indizes	intendierte Bedeutung
$\mathrm{zust}_{t,q}$	$0 \le t \le p(\|w\|)$ $q \in Q$	nach t Schritten befindet sich TM im Zustand q
$\mathrm{pos}_{t,i}$	$0 \le t \le p(\|w\|)$ $-p(\|w\|) \le i \le p(\|w\|)$	nach t Schritten befindet sich Kopf auf Position i
$\mathrm{band}_{t,i,a}$	$0 \le t \le p(\|w\|)$ $-p(\|w\|) \le i \le p(\|w\|)$ $a \in \Gamma$	nach t Schritten steht in Zelle i der Buchstabe a

Die Konstruktion erfolgt so, daß

- sie in Zeit polynomiell in $|w|$ ausgeführt werden kann und
- die erfüllenden Belegungen von φ_w den akzeptierenden Berechnungen bei Eingabe von w entsprechen. Also ist φ_w genau dann erfüllbar, wenn w von M akzeptiert wird.

Damit ist die Abbildung $w \mapsto \varphi_w$ eine Polynomialzeitreduktion von A auf SAT. $\square$

Aus den Sätzen 5.5 und 5.6 folgt unmittelbar:

Folgerung 5.7. *Wenn* SAT $\in \mathsf{P}$ *gilt, so gilt* $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P}$ *(und damit* $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$*).*

Mit anderen Worten: Wenn es einen „effizienten“ Algorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem SAT gibt, so gibt es „effiziente“ Algorithmen für alle Probleme aus NP.

Oder auch: Wenn es irgendein Problem in NP gibt, das keinen „effizienten“ Lösungsalgorithmus besitzt, so gibt es auch keinen „effizienten“ Algorithmus für SAT.

Um also unsere Frage „Haben alle natürlichen Probleme einen effizienten Algorithmus?“ zu beantworten, braucht man nur das Erfüllbarkeitsproblem SAT zu untersuchen.

Gibt es vielleicht Alternativen (für diejenigen, die die Aussagenlogik nicht so sehr mögen)?

Zunächst eine Abstraktion:

Definition. Sei $B \subseteq \Sigma^*$.

- B ist NP-*schwer*, wenn $A \leq_P B$ für alle $A \in \mathsf{NP}$ gilt.
- B ist NP-*vollständig*, wenn zusätzlich $B \in \mathsf{NP}$ gilt.

Bemerkung.

- Nach Beispiel 5.1 und Satz 5.6 ist das Erfüllbarkeitsproblem SAT NP-vollständig.
- Ist A NP-vollständig und sogar in P, so gilt $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P}$ nach Satz 5.5.

Um Alternativen für das Erfüllbarkeitsproblem SAT zu haben, suchen wir also andere NP-vollständige Probleme. Um zu zeigen, daß ein gegebenes Problem NP-vollständig ist, verwendet man oft die folgende Aussage:

Satz 5.8. *Sei A NP-vollständig und $A \leq_P B \in \mathsf{NP}$. Dann ist auch B NP-vollständig.*

Wir wissen bereits, daß die folgenden Problem in NP liegen:

- das Hamiltonizitätsproblem DHC
- das Färbbarkeitsproblem 3C
- das Rundreiseproblem TSP

Man kann zeigen: SAT $\leq_P$ 3C und SAT $\leq_P$ DHC. Also sind auch diese beiden Probleme nach obigem Satz NP-vollständig.

Lemma 5.9. DHC $\leq_P$ TSP.

BewIdee:
Wir wollen eine Polynomialzeitreduktion von DHC auf TSP angeben. Dazu sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph.
Sei $G' = (V, E')$ der vollständige gerichtete Graph auf den Knoten V von G. Für $(v, w) \in E'$ setze

$$\ell((v,w)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v,w) \in E \\ 2 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Weiterhin sei $L = |V|$.
Die Konstruktion von (G', ℓ, L) aus G erfolgt so, daß

- sie in Zeit polynomiell in $|G|$ ausgeführt werden kann und
- die Hamiltonkreise von G genau den Rundreisen der Länge L in (G', ℓ) entsprechen. Da (G', ℓ) keine Rundreisen der Länge $< L$ erlaubt, gilt also $G \in \text{DHC} \iff (G', \ell, L) \in \text{TSP}$.

Damit ist die Abbildung $G \mapsto (G', \ell, L)$ eine Polynomialzeitreduktion von DHC auf TSP.
$\square$

Da DHC NP-vollständig ist und TSP in NP liegt, ist TSP also NP-vollständig.
Damit haben wir

Folgerung. *Wenn* TSP $\in \mathsf{P}$ *gilt, so gilt* $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P}$ *(und damit* $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$*) (analog für das Hamiltonizitätsproblem, das Färbbarkeitsproblem und sehr viele andere Probleme).*