3.5 Kellerautomaten

1. Frage: Wir haben gesehen, daß kontextfreie Sprachen nicht unbedingt durch NFAs akzeptiert werden können (Bsp.: $\{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei, aber nicht regulär).
Wie müssen wir die NFAs erweitern, um alle kontextfreien Sprachen (aber auch nicht mehr) akzeptieren zu können?

2. Frage: Wir haben gesehen, daß mittels CYK-Algorithmus für jede kontextfreie Grammatik G und jedes Wort w in polynomieller Zeit entschieden werden kann, ob $w \in L(G)$ liegt. Im positiven Fall wird in derselben Zeit auch ein Ableitungsbaum konstruiert (was für Compiler sehr hilfreich ist).
Für eine feste kontextfreie Grammatik in Chomsky-NF benötigt der Algorithmus $O(|w|^3)$ viele Schritte.
Kann man (zumindest für gewissen kontextfreie Sprachen) schnellere Algorithmen angeben?

Definition. 1. Ein *Kellerautomat (mit Endzuständen)* (PDA) ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \iota, \#, \delta, F)$, wobei

- Q eine endliche Menge von „Zuständen“,
- Σ und Γ Alphabete („Eingabe-“ bzw. „Kelleralphabet“),
- $\iota \in Q$ der „Initialzustand“,
- $\# \in \Gamma$ das „Kellerstartsymbol“,
- $\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ mit $\delta(q, x, A)$ endlich f.a. $q \in Q$, $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $A \in \Gamma$ die „Überführungsfunktion“ und
- $F \subseteq Q$ die Menge der „Endzustände“ sind.

2. Eine *Konfiguration von M* ist ein Tupel $(q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$, wobei q der „aktuelle Zustand“, w das „noch zu lesende Wort“ und γ der „Kellerinhalt“ ist.

3. Für $q, q' \in Q$, $w, w' \in \Sigma^*$, $A \in \Gamma$ und $\gamma, \gamma' \in \Gamma^*$ setzen wir

$$(q, w, A\gamma) \vdash (q', w', \gamma'\gamma)\,,$$

falls es $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ gibt mit

$$w = aw' \text{ und } (q', \gamma') \in \delta(q, a, A)\,.$$

4. Für Konfigurationen K und K' schreiben wir

$$K \vdash^* K',$$

wenn es $n \in \mathbb{N}$ und Konfigurationen $K_0, K_1, \cdots, K_n$ gibt mit

$$K = K_0 \vdash K_1 \vdash \cdots \vdash K_n = K'.$$

5. Der PDA M *akzeptiert* das Wort $w \in \Sigma^*$, wenn es $f \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$ gibt mit

$$(\iota, w, \#) \vdash^* (f, \varepsilon, \gamma).$$

Sei $L(M) \subseteq \Sigma^*$ die Menge der von M akzeptierten Wörter.

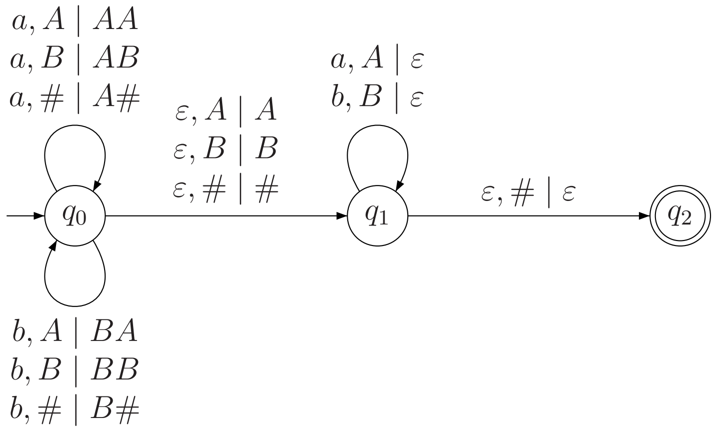
Beispiel. Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \iota, \#, \delta, F)$ der PDA mit

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{A, B, \#\}$
- $\iota = q_0$,
- $F = \{q_2\}$

$\delta(q_0, ., .)$	a	b	ε
A	$\{(q_0, AA)\}$	$\{(q_0, BA)\}$	$\{(q_1, A)\}$
B	$\{(q_0, AB)\}$	$\{(q_0, BB)\}$	$\{(q_1, B)\}$
$\#$	$\{(q_0, A\#)\}$	$\{(q_0, B\#)\}$	$\{(q_1, \#)\}$

$\delta(q_1, ., .)$	a	b	ε
A	$\{(q_1, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
B	$\emptyset$	$\{(q_1, \varepsilon)\}$	$\emptyset$
$\#$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, x, X) = \emptyset$ für alle $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma$



Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&(q_0, abba, \#) \vdash (q_0, bba, A\#) \vdash (q_1, bba, A\#) \\
&(q_0, abba, \#) \vdash (q_0, bba, A\#) \vdash (q_0, ba, BA\#) \vdash (q_1, ba, BA\#) \\
&\qquad \vdash (q_1, a, A\#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Also haben wir $abba \in L(M)$ und allgemeiner $L(M) = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$

Lemma 3.8. *Aus einer kontextfreien Grammatik G kann ein Kellerautomat M berechnet werden mit $L(G) = L(M)$.*

Konstruktion. Idee:

- erzeuge (nichtdet.) ein Wort von $L(G)$ auf dem Keller und vergleiche es mit der Eingabe
- da PDAs nur Zugriff auf das oberste Kellersymbol haben, muß Erzeugung und Vergleich im Reißverschlußverfahren erfolgen.

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$.
Konstruiere $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \iota, \#, \delta, F)$ mit

- $Q = \{\iota, f\}$,
- $\Gamma = N \cup \Sigma \cup \{\#, \perp\}$,
- $F = \{f\}$,

- $\delta(\iota, \varepsilon, \#) = \{(\iota, S\bot)\}$ (Initialisierung)

  $\delta(\iota, \varepsilon, A) = \{(\iota, \gamma) \mid (A \to \gamma) \in P\}$ (steht $A \in N$ auf dem Keller, so expandiere es gemäß einer Regel)

  $\delta(\iota, a, a) = \{(\iota, \varepsilon)\}$ (steht $a \in \Sigma$ auf dem Keller, so vergleiche es mit nächstem Eingabesymbol)

  $\delta(\iota, \varepsilon, \bot) = \{(f, \varepsilon)\}$ (Abschluß)

  $\delta(\iota, \varepsilon, a) = \delta(\iota, a, b) = \delta(\iota, a, B) = \delta(f, x, X) = \emptyset$ f.a. $a, b \in \Sigma$ mit $a \neq b$, $A \in V$, $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma$

$\square$

Beispiel. Wir betrachten die kontextfreie Grammatik $G = (N, \Sigma, S, P)$ mit $N = \{S\}$ und $\Sigma = \{0, 1\}$, wobei P die folgenden Regeln enthält:

$$S \to 0S1S \qquad\qquad S \to 01S$$
$$S \to 0S1 \qquad\qquad S \to 01$$

PDA-Berechnung	Ableitung der Grammatik
$(\iota, 001011, \#)$	
$\vdash (\iota, 001011, S\bot)$	S
$\vdash (\iota, 001011, 0S1\bot)$	$\Rightarrow_G 0S1$
$\vdash (\iota, 01011, S1\bot)$	
$\vdash (\iota, 01011, 01S1\bot)$	$\Rightarrow_G 001S1$
$\vdash (\iota, 1011, 1S1\bot)$	
$\vdash (\iota, 011, S1\bot)$	
$\vdash (\iota, 011, 011\bot)$	$\Rightarrow_G 001011$
$\vdash (\iota, 11, 11\bot)$	
$\vdash (\iota, 1, 1\bot)$	
$\vdash (\iota, \varepsilon, \bot)$	
$\vdash (f, \varepsilon, \varepsilon)$	

Die Expansionsschritte des PDA entsprechen also den Ableitungsschritten der kontextfreie Grammatik.

Bemerkung. Angenommen, alle rechten Seiten von G gehören zu ΣN^*. Dann besteht jede Berechnung des PDA aus abwechselnden Expansions- und Vergleichstransitionen (abgesehen von Initialisierung und Abschluß). Dann können diese zusammengefaßt werden (an Stelle von z.B. $(\iota, aw, A\gamma) \vdash (\iota, aw, aBCD\gamma) \vdash (\iota, w, BCD\gamma)$ mache in einem Schritt $(\iota, aw, A\gamma) \vdash (\iota, w, BCD\gamma)$).
Zusätzlich kommt man dann mit einem Zustand und ohne Initialisierung und Abschluß aus.
die gute Nachricht: Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G' in „Greibach-Normalform“ mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Satz 3.9. *Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann sind äquivalent*

(1) L ist kontextfrei.

(2) es gibt einen PDA M mit $L = L(M)$.

(3) es gibt einen PDA M mit nur einem Zustand und ohne ε-Transitionen mit $L(M) = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Definition. Ein PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \iota, \#, \delta, F)$ ist *deterministisch*, wenn für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ gilt

$$|\delta(q, a, A)| + |\delta(q, \varepsilon, A)| \leq 1\,.$$

Bemerkung.

- Ist M det. PDA und $w \in \Sigma^*$, so kann in linearer Zeit entschieden werden, ob $w \in L(M)$.
- Aus einem det. PDA M kann ein det. PDA M' berechnet werden mit $L(M') = \Sigma^* \setminus L(M)$.

  Für beliebige PDAs gilt dies nicht, da z.B. das Komplement der kontextfreien Sprache $L = \{a^k b^\ell c^m \mid k = \ell \text{ oder } \ell = m\}$ nicht kontextfrei ist.

  Damit kann aber diese kontextfreie Sprache nicht von einem det. PDA akzeptiert werden (aber natürlich von einem nichtdet.).