Natürliches Schließen

Ein (mathematischer) Beweis zeigt, wie die Behauptung aus den Voraussetzungen folgt (vgl. Folie 1.26).

Analog zeigt ein „Beweisbaum“ (= „Herleitung“ = „Deduktion“), wie eine Formel der Aussagenlogik aus Voraussetzungen (ebenfalls Formeln der Aussagenlogik) folgt.

Diese „Deduktionen“ sind Bäume (vgl. Folie 1.27), deren Knoten mit Formeln beschriftet sind:

- an der Wurzel steht die Behauptung (= Konklusion φ)
- an den Blättern stehen Voraussetzungen (= Hypothesen oder Annahmen aus Γ)
- an den inneren Knoten stehen „Teilergebnisse“ und „Begründungen“

Konstruktion von Deduktionen

Aus der Annahme der Aussage φ folgt φ unmittelbar:

eine triviale Deduktion

$$\varphi$$

mit Hypothesen $\{\varphi\}$ und Konklusion φ.

Auf den folgenden Folien werden wir

- überlegen, wie aus „einfachen mathematischen Beweisen“ umfangreichere entstehen können und
- parallel dazu definieren, wie aus einfachen Deduktionen umfangreichere konstruiert werden können.

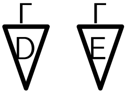
Konjunktionseinführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „φ und ψ“ sieht üblicherweise so aus:

> „Zunächst zeige ich φ: ... (hier steckt die eigentliche Arbeit)
> Jetzt zeige ich ψ: ... (nochmehr eigentliche Arbeit)
> Also haben wir „φ und ψ“ gezeigt. qed“

Konjunktionseinführung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von ψ mit Hypothesen aus Γ, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\varphi \wedge \psi$ mit Hypothesen aus Γ:



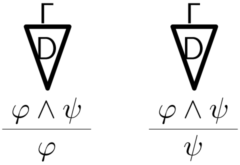
$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

Konjunktionseinführung (Kurzform)

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge\mathrm{I})$$

Konjunktionselimination (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\varphi \wedge \psi$ mit Hypothesen aus Γ, so ergeben sich die folgenden Deduktionen von φ bzw. von ψ mit Hypothesen aus Γ:



Konjunktionselimination (Kurzform)

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,(\wedge E_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge E_2)$$

Beispiel

Wir zeigen $\varphi \wedge \psi$ unter der Hypothese $\psi \wedge \varphi$:

$$\ldots$$

Dies ist eine Deduktion mit Konklusion $\varphi \wedge \psi$ und Hypothese $\psi \wedge \varphi$ (zweimal verwendet).

Implikationseinführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „Aus φ folgt ψ“ sieht üblicherweise so aus:

> „Angenommen, φ gilt.
> Dann ... (hier steckt die eigentliche Arbeit).
> Damit gilt ψ.
> Also haben wir gezeigt, daß ψ aus φ folgt. qed“

Die Aussage φ ist also eine „temporäre Hypothese“.

Implikationseinführung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von ψ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\varphi \to \psi$ mit Hypothesen aus Γ:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \cup \cancel{\{\varphi\}} \\ \nabla D \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}$$

Implikationseinführung (Kurzform)

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,(\to\mathrm{I})$$

Beispiel

... Dies ist eine Deduktion von $\varphi \to \varphi$ ohne Hypothesen.

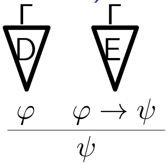
Implikationselimination in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „ψ gilt“ über eine Hilfsaussage sieht so aus:

> „Zunächst zeigen wir, daß φ gilt: …
> Dann beweisen wir, daß ψ aus φ folgt: …
> Also haben wir ψ gezeigt. qed“

Implikationselimination oder modus ponens (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von $\varphi \to \psi$ mit Hypothesen aus Γ, so ergibt sich die folgende Deduktion von ψ mit Hypothesen aus Γ:



Implikationselimination oder modus ponens (Kurzform)

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,(\to\mathsf{E})$$

Beispiel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \quad [\psi]^2}{\varphi \land \psi}\,(\land\mathsf{I}) \qquad [(\varphi \land \psi) \to \sigma]^3}{\sigma}\,(\to\mathsf{E})}{\psi \to \sigma}\,(\to\mathsf{I})^2}{\varphi \to (\psi \to \sigma)}\,(\to\mathsf{I})^1}{((\varphi \land \psi) \to \sigma) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))}\,(\to\mathsf{I})^3$$

Bemerkung: die Indizes 1, 2 und 3 machen deutlich, welche Hypothese bei welcher Regelanwendung gestrichen wurde.

Diese Deduktion hat keine Hypothesen!

Disjunktionselimination oder Fallunterscheidung in math. Beweisen

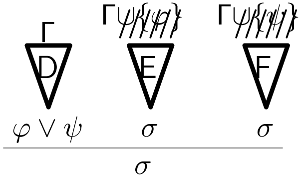
Ein mathematischer Beweis einer Aussage „σ gilt" mittels Fallunterscheidung sieht üblicherweise so aus:

> „Zunächst zeigen wir, daß $\varphi \vee \psi$ gilt: ...
> Gilt φ, so gilt σ, denn ...
> Gilt ψ, so gilt ebenfalls σ, denn ...
> Also haben wir gezeigt, daß σ gilt. qed"

Die Aussagen φ und ψ sind also wieder „temporäre Hypothesen".

Disjunktionselimination oder Fallunterscheidung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\varphi \vee \psi$ mit Hypothesen aus Γ, ist E eine Deduktion von σ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$ und ist F eine Deduktion von σ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\psi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von σ mit Hypothesen aus Γ:



Disjunktionselimination oder Fallunterscheidung (Kurzform)

$$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \sigma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots \\ \sigma\end{array}}{\sigma}\,(\vee\mathsf{E})$$

Disjunktionseinführung (Kurzform)

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee\mathsf{I}_1) \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee\mathsf{I}_2)$$

Negationseinführung in math. Beweisen

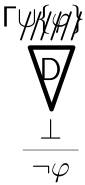
Ein mathematischer Beweis einer Aussage „φ gilt nicht“ sieht so aus:

> „Angenommen, φ gilt.
> Dann folgt $0 = 1$, denn .... Mit anderen Worten, dies führt zu einem Widerspruch.
> Also haben wir gezeigt, daß φ nicht gilt. qed“

Die Aussage φ ist also wieder eine „temporäre Hypothese“.

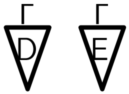
Negationseinführung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\neg\varphi$ mit Hypothesen aus Γ:



Negationselimination (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\neg\varphi$ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus Γ:



$$\frac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\perp}$$

Negationseinführung und -elimination (Kurzform)

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg\varphi}\,(\neg\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp}\,(\neg\mathrm{E})$$

Hat man „$0 = 1$“ bewiesen, so ist man bereit, alles zu glauben:

ex falso sequitur quodlibet

(ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus Γ, so ergibt sich die folgende Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\perp}{\varphi}$$

(Kurzform)

$$\frac{\perp}{\varphi}\,(\perp)$$

math. Widerspruchsbeweis

Ein indirekter Beweis einer Aussage „φ gilt“ sieht üblicherweise so aus:

> „Angenommen, φ gilt nicht, d.h. $\neg\varphi$ gilt.
> Dann folgt $0 = 1$, d.h. ein Widerspruch.
> Also haben wir gezeigt, daß φ gilt. qed“

Die Aussage $\neg\varphi$ ist also wieder eine „temporäre Hypothese“.

reductio ad absurdum (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\bot$ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ:

$$\begin{array}{c} \Gamma \cancel{\cup \{\neg\varphi\}} \\ D \\ \bot \\ \hline \varphi \end{array}$$

reductio ad absurdum (Kurzform)

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\,(\mathrm{raa})$$

Regeln des natürlichen Schließens I

$$\varphi$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge\mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,(\wedge\mathrm{E}_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge\mathrm{E}_2)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee\mathrm{I}_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee\mathrm{I}_2) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi]\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\,(\vee\mathrm{E})$$

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\,(\to\mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,(\to\mathrm{E})$$

Regeln des natürlichen Schließens II

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,(\neg \mathrm{I}) \qquad\qquad \dfrac{\neg\varphi \quad \varphi}{\bot}\,(\neg \mathrm{E})$$

$$\dfrac{\bot}{\varphi}\,(\bot)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,(\mathrm{raa})$$

Definition

Für eine Formelmenge Γ und eine Formel φ schreiben wir

$$\Gamma \vdash \varphi$$

wenn es eine Deduktion gibt mit Hypothesen aus Γ und Konklusion φ. Wir sagen „φ ist eine syntaktische Folgerung von Γ“.

Eine Formel φ ist ein Theorem, wenn $\emptyset \vdash \varphi$ gilt.

Bemerkung

$\Gamma \vdash \varphi$ sagt (zunächst) nichts über den Inhalt der Formeln in $\Gamma \cup \{\varphi\}$ aus, sondern nur über die Tatsache, daß φ mithilfe des natürlichen Schließens aus den Formeln aus Γ hergeleitet werden kann.

Ebenso sagt „φ ist Theorem" nur, daß φ abgeleitet werden kann, über „Wahrheit" sagt dieser Begriff (zunächst) nichts aus.

Satz

Für alle Formeln φ und ψ gilt $\{\neg(\varphi \vee \psi)\} \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

Beweis: Wir geben eine Deduktion an... $\square$

Satz

$\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$

Beweis: Wir geben eine Deduktion an:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\varphi \vee \psi]^2$}
\AxiomC{$\neg\varphi \wedge \neg\psi$}
\RightLabel{$(\wedge \mathsf{E}_1)$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi$}
\AxiomC{$[\varphi]^1$}
\RightLabel{$(\neg \mathsf{E})$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$\neg\varphi \wedge \neg\psi$}
\RightLabel{$(\wedge \mathsf{E}_2)$}
\UnaryInfC{$\neg\psi$}
\AxiomC{$[\psi]^2$}
\RightLabel{$(\neg \mathsf{E})$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\vee \mathsf{E})^1$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg \mathsf{I})^2$}
\UnaryInfC{$\neg(\varphi \vee \psi)$}
\end{prooftree}
$$

Satz

$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$

Beweis: Wir geben eine Deduktion an:

$$\dfrac{\neg\varphi \vee \neg\psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^1 \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^2}{\varphi}\,(\wedge\mathsf{E}_1)}{\bot}\,(\neg\mathsf{E})}{\neg(\varphi \wedge \psi)}\,(\neg\mathsf{I})^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^1 \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^3}{\psi}\,(\wedge\mathsf{E}_2)}{\bot}\,(\neg\mathsf{E})}{\neg(\varphi \wedge \psi)}\,(\neg\mathsf{I})^3}{\neg(\varphi \wedge \psi)}\,(\vee\mathsf{E})^1$$

□

Satz

$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \psi \vee \varphi$

Beweis: Wir geben eine Deduktion an:

$$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{[\varphi]^1}{\psi \vee \varphi} \qquad \dfrac{[\psi]^1}{\psi \vee \varphi}}{\psi \vee \varphi}\,(\vee\mathsf{E})^1$$

Satz

Für jede Formel φ ist $\neg\neg\varphi \to \varphi$ ein Theorem.

Beweis: Wir geben eine Deduktion mit Konklusion $\neg\neg\varphi \to \varphi$ ohne Hypothesen an... $\square$

Satz

Für jede Formel φ ist $\varphi \vee \neg\varphi$ ein Theorem.

Beweis: Wir geben eine Deduktion mit Konklusion $\varphi \vee \neg\varphi$ ohne Hypothesen an... $\square$

Bemerkung

Man kann beweisen, daß jede Deduktion der letzten beiden Theoreme die Regel (raa) verwendet, sie also nicht „intuitionistisch“ gelten (vgl. Folie ca. 4.14).

Satz

$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\neg(\varphi \wedge \psi)
\qquad
\dfrac{[\varphi]^1 \quad [\psi]^2}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge\mathsf{I})
}{\bot}\,(\neg\mathsf{E})
}{\neg\psi}\,(\neg\mathsf{I})^2
}{\neg\varphi \vee \neg\psi}\,(\vee\mathsf{I}_2)
\qquad
\dfrac{[\neg\varphi]^1}{\neg\varphi \vee \neg\psi}\,(\vee\mathsf{I}_1)
}{\neg\varphi \vee \neg\psi}\,(\vee\mathsf{E})^1
$$