Korrektheit

Können wir durch mathematische Beweise zu falschen Aussagen kommen?

Können wir durch das natürliche Schließen zu falschen Aussagen kommen?

Existiert eine Menge Γ von Formeln und eine Formel φ mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \not\models_W \varphi$? Für welche Wahrheitswertebereiche W?

Frage für diese Vorlesung

Für welche Wahrheitswertebereiche W gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models_W \varphi$$

bzw.

$$\varphi \text{ ist Theorem } \implies \varphi \text{ ist } W\text{-Tautologie?}$$

Beispiel

Betrachte den Kleeneschen Wahrheitswertebereich K_3.

- Sei p atomare Formel.

$$\dfrac{[p]^4}{p \to p}\,(\to\mathrm{I})^4$$

Also gilt $\emptyset \vdash p \to p$,
d.h. $p \to p$ ist Theorem.

- Sei $\mathcal{B}$ K_3-Belegung mit $\mathcal{B}(p) = 1/2$. Dann gilt
  $\mathcal{B}(p \to p) = \max(\mathcal{B}(p), 1 - \mathcal{B}(p)) = 1/2$,
  also $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \emptyset\} = 1 > 1/2 = \mathcal{B}(p \to p)$.
  Damit haben wir gezeigt $\emptyset \not\models_{K_3} p \to p$.

Die Implikation

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models_W \varphi$$

gilt also NICHT für den Kleeneschen Wahrheitswertebereich $W = K_3$ und damit auch NICHT für den Wahrheitswertebereich der Fuzzy-Logik F.

Korrektheitslemma für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich B

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge Γ und Konklusion φ. Dann gilt $\Gamma \models_B \varphi$, d.h. $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\varphi)$ für alle passenden B-Belegungen $\mathcal{B}$.

Beweis: Induktion über die Größe der Deduktion D (d.h. Anzahl der Regelanwendungen).

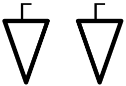
- IA die kleinste Deduktion D hat die Form φ mit Hypothese φ und Konklusion φ. Sei $\mathcal{B}$ passende B-Belegung.

  Hypothesen von D in $\Gamma \Longrightarrow \varphi \in \Gamma \Longrightarrow \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\varphi)$ $\Longrightarrow \Gamma \models_B \varphi$

IV Behauptung gelte für alle Deduktionen, die kleiner sind als D.

IS Wir unterscheiden verschiedene Fälle, je nachdem, welche Regel als letzte angewandt wurde.

($\wedge$I) Die Deduktion D hat die Form



$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}\,(\wedge \mathrm{I})$$

mit $\varphi = \alpha \wedge \beta$. Sei $\mathcal{B}$ passende B-Belegung. Nach IV gelten

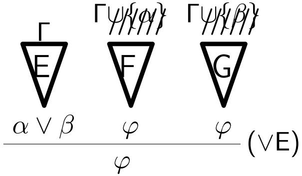
$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\alpha) \text{ und } \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\beta)$$

und damit

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\alpha) \wedge_B \mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{B}(\varphi)\,.$$

Da $\mathcal{B}$ beliebig war, haben wir $\Gamma \models_B \varphi$ gezeigt.

($\vee$E) Die Deduktion D hat die Form



Also gibt es Deduktion E mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\alpha \vee \beta$ und Deduktionen F und G mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\alpha\}$ bzw. $\Gamma \cup \{\beta\}$ und Konklusion φ. Sei $\mathcal{B}$ passende B-Belegung. Nach IV gelten

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\alpha \vee \beta) \tag{1}$$

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\}\} \leq \mathcal{B}(\varphi) \tag{2}$$

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\beta\}\} \leq \mathcal{B}(\varphi) \tag{3}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $\mathcal{B}(\alpha) \leq \mathcal{B}(\beta)$:

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \overset{(1)}{\leq} \mathcal{B}(\alpha \vee \beta) = \mathcal{B}(\alpha) \vee_B \mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}(\beta)$$

   impliziert

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\beta\}\} \overset{(3)}{\leq} \mathcal{B}(\varphi)$$

2. $\mathcal{B}(\alpha) > \mathcal{B}(\beta)$: analog

Da $\mathcal{B}$ beliebig war, haben wir $\Gamma \models_B \varphi$ gezeigt.

$(\to\text{I})$ Die Deduktion D hat die Form

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\cup\{\cancel{\alpha}\}\\ \nabla \\ \beta\end{array}}{\alpha\to\beta}\,(\to\text{I})$$

mit $\varphi = \alpha \to \beta$. Sei $\mathcal{B}$ eine passende B-Belegung. Nach IV gilt

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\}\} \leq \mathcal{B}(\beta)$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

$$\begin{array}{lrcl}
\mathcal{B}(\alpha) = 0: & \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} & \leq & 1 = \to_B (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta)) \\
& & = & \mathcal{B}(\alpha \to \beta) = \mathcal{B}(\varphi) \\
\mathcal{B}(\alpha) = 1: & \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} & = & \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\}\} \\
& & \leq & \mathcal{B}(\beta) = \to_B (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta)) \\
& & = & \mathcal{B}(\alpha \to \beta) = \mathcal{B}(\varphi)
\end{array}$$

Da $\mathcal{B}$ beliebig war, habe wir $\Gamma \models_B \varphi$ gezeigt.

(raa) Die Deduktion D hat die Form

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\cancel{\cup\{\neg\varphi\}}\\ \nabla \\ \bot\end{array}}{\varphi}\,\text{(raa)}$$

Sei $\mathcal{B}$ eine passende B-Belegung. Nach IV gilt

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}\} \leq \mathcal{B}(\bot) = 0\,.$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

- $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 0$: dann gilt $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\varphi)$.
- $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 1$: Wegen $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}\} = 0$ folgt $0 = \mathcal{B}(\neg\varphi) = \neg_B(\mathcal{B}(\varphi))$ und daher $\mathcal{B}(\varphi) = 1 \geq \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Da $\mathcal{B}$ beliebig war, haben wir $\Gamma \models_B \varphi$ gezeigt.

Ist die letzte Schlußregel in der Deduktion D von der Form $(\wedge\mathrm{I})$, $(\vee\mathrm{E})$, $(\rightarrow\mathrm{I})$ oder (raa), so haben wir die Behauptung des Lemmas gezeigt. Analog kann dies für die verbleibenden Regeln getan werden. $\square$

Korrektheitssatz für natürliches Schließen & Wahrheitswertebereich B

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models_B \varphi\,.$$

Beweis: Wegen $\Gamma \vdash \varphi$ existiert eine Deduktion D mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ. Nach dem Korrektheitslemma folgt $\Gamma \models_B \varphi$. $\square$

Korollar

Jedes Theorem ist eine B-Tautologie.

Korrektheitssatz für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich $B_\mathbb{R}$

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models_{B_\mathbb{R}} \varphi\,.$$

Beweis:

- 1. Variante: verallgemeinere den Beweis von Korrektheitslemma und Korrektheitssatz für B auf $B_\mathbb{R}$
  (Problem: wir haben mehrfach ausgenutzt, daß $B = \{0, 1\}$ mit $0 < 1$)
- 2. Variante: Folgerung aus Korrektheitssatz für B. $\square$

Korollar

Jedes Theorem ist eine $B_\mathbb{R}$-Tautologie.

Korrektheitslemma für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich $H_{\mathbb{R}}$

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge Γ und Konklusion φ, die die Regel (raa) nicht verwendet. Dann gilt $\Gamma \models_{H_{\mathbb{R}}} \varphi$.

Beweis: ähnlich zum Beweis des Korrektheitslemmas für den Wahrheitswertebereich B. Nur die Behandlung der Regel (raa) kann nicht übertragen werden. $\square$

Beispiel

Sei p eine atomare Formel.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg p \quad [\neg p]^1}{\bot}\,(\neg\mathrm{E})}{p}\,(\mathrm{raa})^1$$

Also gilt $\{\neg\neg p\} \vdash p$, d.h. p ist syntaktische Folgerung von $\neg\neg p$.

Sei $\mathcal{B}$ $H_{\mathbb{R}}$-Belegung mit $\mathcal{B}(p) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\Longrightarrow$ (nach Folie 3.21) $\mathcal{B}(\neg\neg p) = \mathbb{R} \supsetneq \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathcal{B}(p)$

$\Longrightarrow$ $\neg\neg p \not\models_{H_{\mathbb{R}}} p$, d.h., p ist keine $H_{\mathbb{R}}$-Folgerung von $\neg\neg p$.

Korrektheitssatz für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich $H_{\mathbb{R}}$

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ ohne (raa)} \implies \Gamma \models_{H_{\mathbb{R}}} \varphi\,.$$

Korollar

Jedes (raa)-frei herleitbare Theorem ist eine $H_{\mathbb{R}}$-Tautologie.

Folgerung

Jede Deduktion der Theoreme $\neg\neg\varphi \to \varphi$ und $\varphi \vee \neg\varphi$ ohne Hypothesen verwendet (raa).

Beweis: Folien 2.26 und 2.27: diese zwei Formeln sind Theoreme.

Folien 3.20 und 3.22: diese zwei Formeln sind keine $H_{\mathbb{R}}$-Tautologien.

Korollar auf vorheriger Folie: sie sind nicht (raa)-frei herleitbar. $\square$

Vollständigkeit

Können wir durch mathematische Beweise zu allen korrekten Aussagen kommen?

Können wir durch das natürliche Schließen zu allen korrekten Aussagen kommen?

Existiert eine Menge Γ von Formeln und eine Formel φ mit $\Gamma \models_W \varphi$ und $\Gamma \nvdash \varphi$? Für welche Wahrheitswertebereiche W?

Frage für diese und die nächste Vorlesung

Für welche Wahrheitswertebereiche W gilt

$$\Gamma \models_W \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$$

bzw.

$$\varphi \text{ ist } W\text{-Tautologie} \implies \varphi \text{ ist Theorem?}$$

Plan

Sei W einer der Wahrheitswertebereiche B, K_3, F, $B_{\mathbb{R}}$, $H_{\mathbb{R}}$.

z.z. ist $\Gamma \models_W \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$.

dies ist äquivalent zu $\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models_W \varphi$.

hierzu gehen wir folgendermaßen vor:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \Gamma \not\models_W \varphi \\
 & & \Uparrow \text{(Folie 5.8)} \\
\Gamma \nvdash \varphi & & \Gamma \not\models_B \varphi \\
\Updownarrow \text{(Folie 4.17)} & & \Updownarrow \text{(Folie 5.7)} \\
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent} & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(Folie 4.20)} & & \Uparrow \text{(klar)} \\
\exists \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ maximal konsistent} & \underset{\text{(Folie 5.2)}}{\implies} & \Delta \text{ erfüllbar}
\end{array}
$$

Konsistente Mengen

Definition

Sei Γ eine Menge von Formeln.
Γ heißt inkonsistent, wenn $\Gamma \vdash \bot$ gilt. Sonst heißt Γ konsistent.

Lemma

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent.}$$

Beweis:
Wir zeigen „$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent“:

Richtung „$\Rightarrow$“, gelte also $\Gamma \vdash \varphi$.

$\Longrightarrow$ es gibt Deduktion D mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ

$\Longrightarrow$ Wir erhalten die folgende Deduktion mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ und Konklusion $\perp$:

$$\frac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\perp}\,(\neg\mathrm{E})$$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$, d.h. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ist inkonsistent.

Richtung „$\Leftarrow$“, sei also $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent.

$\Longrightarrow$ Es gibt Deduktion D mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ und Konklusion $\perp$.

$\Longrightarrow$ Wir erhalten die folgende Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ:

$$\cancel{\Gamma \cup \{\neg\varphi\}}$$

$$\frac{\perp}{\varphi}\,(\text{raa})$$

$\Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ $\square$

Maximal konsistente Mengen

Definition

Eine Formelmenge Δ ist maximal konsistent, wenn sie konsistent ist und wenn gilt „$\Sigma \supseteq \Delta$ konsistent $\Longrightarrow \Sigma = \Delta$“.

Satz

Jede konsistente Formelmenge Γ ist in einer maximal konsistenten Formelmenge Δ enthalten.

Beweis:

Sei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Liste aller Formeln (da wir abzählbar viele atomare Formeln haben, gibt es nur abzählbar viele Formeln)

Wir definieren induktiv konsistente Mengen Γ_n:

- Setze $\Gamma_1 = \Gamma$
- Setze $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{falls diese Menge konsistent} \\ \Gamma_n & \text{sonst.} \end{cases}$

Setze nun $\Delta = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_n$.

1. Wir zeigen indirekt, daß Δ konsistent ist: Angenommen, $\Delta \vdash \bot$.

   $\Longrightarrow$ Es gibt Deduktion D mit Konklusion $\bot$ und endlicher Menge von Hypothesen $\Delta' \subseteq \Delta$.

   $\Longrightarrow$ Es gibt $n \geq 1$ mit $\Delta' \subseteq \Gamma_n$

   $\Longrightarrow$ $\Gamma_n \vdash \bot$, $\lightning$ zu Γ_n konsistent. Also ist Δ konsistent.

2. Wir zeigen indirekt, daß Δ maximal konsistent ist. Sei also $\Sigma \supseteq \Delta$ konsistent. Angenommen, $\Sigma \neq \Delta$.

   $\Longrightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n \in \Sigma \setminus \Delta$

   $\Longrightarrow$ $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \subseteq \Delta \cup \Sigma = \Sigma$ konsistent.

   $\Longrightarrow$ $\varphi_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Delta$, ein Widerspruch, d.h. Δ ist max. konsistent. $\square$

Lemma 1

Sei Δ maximal konsistent und gelte $\Delta \vdash \varphi$. Dann gilt $\varphi \in \Delta$.

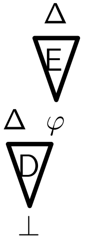
Beweis:

1. Zunächst zeigen wir indirekt, daß $\Delta \cup \{\varphi\}$ konsistent ist:
   Angenommen, $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \bot$.

   $\Longrightarrow \exists$ Deduktion D mit Hypothesen in $\Delta \cup \{\varphi\}$ und Konklusion $\bot$.

   $\Delta \vdash \varphi \Longrightarrow \exists$ Deduktion E mit Hypothesen in Δ und Konklusion φ.

   $\Longrightarrow$ Wir erhalten die folgende Deduktion:



Also $\Delta \vdash \bot$, ein Widerspruch zur Konsistenz von Δ.
Also ist $\Delta \cup \{\varphi\}$ konsistent.

2. Da $\Delta \cup \{\varphi\} \supseteq \Delta$ konsistent und Δ maximal konsistent ist, folgt $\Delta = \Delta \cup \{\varphi\}$, d.h. $\varphi \in \Delta$. $\square$

Lemma 2

Sei Δ maximal konsistent und φ Formel. Dann gilt $\varphi \notin \Delta \iff \neg\varphi \in \Delta$.

Beweis:

- Zunächst gelte $\neg\varphi \in \Delta$. Angenommen, $\varphi \in \Delta$. Dann haben wir die Deduktion

$$\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp}\,(\neg E)$$

und damit $\Delta \vdash \perp$, was der Konsistenz von Δ widerspricht.

- Gelte nun $\varphi \notin \Delta$.

  $\Longrightarrow \Delta \subsetneq \Delta \cup \{\varphi\} \Longrightarrow \Delta \cup \{\varphi\}$ inkonsistent (da Δ max. konsistent)

  $\Longrightarrow$ Es gibt Deduktion D mit Hypothesen in $\Delta \cup \{\varphi\}$ & Konklusion $\bot$.

  $\Longrightarrow$ Wir erhalten die folgende Deduktion:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Delta \cup \cancel{\{\varphi\}}\\ \nabla \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,(\neg\mathrm{I})$$

  $\Longrightarrow \Delta \vdash \neg\varphi \Longrightarrow \neg\varphi \in \Delta$ (nach Lemma 1) $\square$