

Definition

Sei Σ eine Signatur, φ eine Σ -Formel, Δ eine Menge von Σ -Formeln und \mathcal{A} eine Σ -Struktur.

- Δ ist **erfüllbar**, wenn es Σ -Struktur \mathcal{B} und Variableninterpretation $\rho: \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$ gibt mit $\mathcal{B} \models_{\rho} \psi$ für alle $\psi \in \Delta$.
- φ ist **semantische Folgerung** von Δ ($\Delta \models \varphi$) falls für alle Σ -Strukturen \mathcal{B} und alle Variableninterpretationen $\rho: \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$ gilt:

Gilt $\mathcal{B} \models_{\rho} \psi$ für alle $\psi \in \Delta$, so gilt auch $\mathcal{B} \models_{\rho} \varphi$.

- φ ist **allgemeingültig**, falls $\mathcal{B} \models_{\rho} \varphi$ für alle Σ -Strukturen \mathcal{B} und alle Variableninterpretationen ρ gilt.

Bemerkung

φ allgemeingültig gdw. $\emptyset \models \varphi$ gdw. $\{\neg\varphi\}$ nicht erfüllbar

Hierfür schreiben wir auch $\models \varphi$.

Beispiel

Der Satz $\varphi = (\forall x: R(x) \rightarrow \forall x: R(f(x)))$ ist allgemeingültig.

Beweis: Sei Σ Signatur, so daß φ Σ -Satz ist. Sei \mathcal{A} Σ -Struktur und ρ Variableninterpretation. Wir betrachten zwei Fälle:

1 Falls $\mathcal{A} \not\models_{\rho} \forall x R(x)$, so gilt $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$.

2 Wir nehmen nun $\mathcal{A} \models_{\rho} \forall x R(x)$ an.

Sei $a \in U_{\mathcal{A}}$ beliebig und $b = f^{\mathcal{A}}(a)$.

$\mathcal{A} \models_{\rho} \forall x R(x)$

$\implies \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto b]} R(x)$

$\implies R^{\mathcal{A}} \ni (\rho[x \mapsto b])(x) = b = f^{\mathcal{A}}(a) = (\rho[x \mapsto a])(f(x))$

$\implies \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} R(f(x))$.

Da $a \in U_{\mathcal{A}}$ beliebig war, haben wir also $\mathcal{A} \models_{\rho} \forall x: R(f(x))$.

Also gilt auch in diesem Fall $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$.

Da \mathcal{A} und ρ beliebig waren, ist φ somit allgemeingültig. □

Beispiel

Der Satz $\varphi = \exists x (R(x) \rightarrow R(f(x)))$ ist allgemeingültig.

Beweis: Sei Σ Signatur, so daß φ Σ -Satz ist. Sei \mathcal{A} Σ -Struktur und ρ Variableninterpretation. Wir betrachten wieder zwei Fälle:

1 Angenommen, $R^{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}}$. Sei $a \in U_{\mathcal{A}}$ beliebig.

$$\implies f^{\mathcal{A}}(a) \in R^{\mathcal{A}}$$

$$\implies \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} R(f(x))$$

$$\implies \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} R(x) \rightarrow R(f(x))$$

$$\implies \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi.$$

2 Ansonsten existiert $a \in U_{\mathcal{A}} \setminus R^{\mathcal{A}}$.

$$\implies \mathcal{A} \not\models_{\rho[x \mapsto a]} R(x)$$

$$\implies \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} R(x) \rightarrow R(f(x))$$

$$\implies \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi.$$

Da \mathcal{A} und ρ beliebig waren, ist φ somit allgemeingültig. □

Aufgabe

a: allgemeingültig e: erfüllbar u: unerfüllbar

	a	e	u
$P(a)$			
$\exists x: (\neg P(x) \vee P(a))$			
$P(a) \rightarrow \exists x: P(x)$			
$P(x) \rightarrow \exists x: P(x)$			
$\forall x: P(x) \rightarrow \exists x: P(x)$			
$\forall x: P(x) \wedge \neg \forall y: P(y)$			
$\forall x: (P(x, x) \rightarrow \exists x \forall y: P(x, y))$			
$\forall x \forall y: (x = y \rightarrow f(x) = f(y))$			
$\forall x \forall y: (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$			
$\exists x \exists y \exists z: (f(x) = y \wedge f(x) = z \wedge y \neq z)$			
$\exists x \forall x: Q(x, x)$			

Substitutionen

Definition

Eine **Substitution** besteht aus einer Variable $x \in \text{Var}$ und einem Term $t \in T_\Sigma$, geschrieben $[x := t]$.

Die Formel $\varphi[x := t]$ ist die Anwendung der Substitution $[x := t]$ auf die Formel φ . Sie entsteht aus φ , indem alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden. *Sie soll das über t aussagen, was φ über x ausgesagt hat.*

Dazu definieren wir zunächst induktiv, was es heißt, die freien Vorkommen von x im Term $s \in T_\Sigma$ zu ersetzen:

- $x[x := t] = t$
- $y[x := t] = y$ für $y \in \text{Var} \setminus \{x\}$
- $(f(t_1, \dots, t_k))[x := t] = f(t_1[x := t], \dots, t_k[x := t])$
für $f \in \Omega$ mit $\text{ar}(f) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma$

Lemma

Seien Σ Signatur, \mathcal{A} Σ -Struktur, $\rho: \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, $x \in \text{Var}$ und $s, t \in T_{\Sigma}$. Dann gilt

$$\rho(s[x := t]) = \rho[x \mapsto \rho(t)](s).$$

Beweis: Induktion über den Aufbau des Terms s (mit $\rho' = \rho[x \mapsto \rho(t)]$):

- $s = x$: $\rho(s[x := t]) = \rho(t) = \rho'(x) = \rho'(s)$
- $s \in \text{Var} \setminus \{x\}$: $\rho(s[x := t]) = \rho(s) = \rho'(s)$
- $s = f(t_1, \dots, t_k)$:

$$\begin{aligned} \rho\left(\left(f(t_1, \dots, t_k)\right)[x := t]\right) &= \rho\left(f(t_1[x := t], \dots, t_k[x := t])\right) \\ &= f^{\mathcal{A}}\left(\rho(t_1[x := t]), \dots, \rho(t_k[x := t])\right) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} f^{\mathcal{A}}\left(\rho'(t_1), \dots, \rho'(t_k)\right) \\ &= \rho'\left(f(t_1, \dots, t_k)\right) = \rho'(s) \end{aligned}$$



Die Definition von $s[x := t]$ kann induktiv auf Σ -Formeln fortgesetzt werden:

- $(t_1 = t_2)[x := t] = (t_1[x := t] = t_2[x := t])$ für $t_1, t_2 \in T_\Sigma$
- $(R(t_1, \dots, t_k))[x := t] = R(t_1[x := t], \dots, t_k[x := t])$
für $R \in \text{Rel}$ mit $\text{ar}(R) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma$
- $\perp[x := t] = \perp$

Für Σ -Formeln φ und ψ und $y \in \text{Var}$:

- $(\varphi \square \psi)[x := t] = \varphi[x := t] \square \psi[x := t]$ für $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $(\neg \varphi)[x := t] = \neg(\varphi[x := t])$
- $(Qy \varphi)[x := t] = \begin{cases} Qy \varphi[x := t] & \text{falls } x \neq y \\ Qy \varphi & \text{falls } x = y \end{cases}$ für $Q \in \{\exists, \forall\}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \left(\exists x P(x, f(y)) \vee \neg \forall y Q(y, g(a, h(z))) \right) [y := f(u)] \\ &= \left(\exists x P(x, f(f(u))) \vee \neg \forall y Q(y, g(a, h(z))) \right) \end{aligned}$$

Folie 8.5: $\varphi[x := t]$ „soll das über t aussagen, was φ über x ausgesagt hat.“

Gegenbeispiel:

Aus $\exists y \text{ Mutter}(x) = y$ mit Substitution $[x := \text{Mutter}(y)]$ wird
 $\exists y \text{ Mutter}(\text{Mutter}(y)) = y$.

Definition

Sei $[x := t]$ Substitution und φ Σ -Formel.

Die Substitution $[x := t]$ heißt **für φ zulässig**, wenn für alle $y \in \text{Var}$ gilt:

$$y \text{ Variable in } t \implies \varphi \text{ enthält weder } \exists y \text{ noch } \forall y$$

Lemma

Sei Σ Signatur, \mathcal{A} Σ -Struktur, $\rho: \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, $x \in \text{Var}$ und $t \in T_{\Sigma}$.

Ist die Substitution $[x := t]$ für die Σ -Formel φ zulässig, so gilt

$$\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi[x := t] \iff \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \varphi.$$

Beweis: Induktion über den Aufbau der Formel φ (mit $\rho' = \rho[x \mapsto \rho(t)]$):

- $\varphi = (s_1 = s_2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_{\rho} (s_1 = s_2)[x := t] &\iff \mathcal{A} \models_{\rho} s_1[x := t] = s_2[x := t] \\ &\iff \rho(s_1[x := t]) = \rho(s_2[x := t]) \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \rho'(s_1) = \rho'(s_2) \\ &\iff \mathcal{A} \models_{\rho'} s_1 = s_2 \end{aligned}$$

(*) ... Folie 8.6

- andere atomare Formeln analog

- $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} \models_{\rho} (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[x := t] &\iff \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_1[x := t] \wedge \varphi_2[x := t] \\
 &\iff \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_1[x := t] \\
 &\quad \text{und } \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_2[x := t] \\
 &\stackrel{(*)}{\iff} \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi_1 \text{ und } \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi_2 \\
 &\iff \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi_1 \wedge \varphi_2
 \end{aligned}$$

(*) nach IV da $[x := t]$ auch für φ_1 und φ_2 zulässig ist

- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ und $\varphi = \neg\psi$ analog

- $\varphi = \forall y \psi$:

Wir betrachten zunächst den Fall $x = y$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_{\rho} (\forall x \psi)[x := t] &\iff \mathcal{A} \models_{\rho} \forall x \psi \\ &\iff \mathcal{A} \models_{\rho'} \forall x \psi \quad (\text{denn } x \notin FV(\forall x \psi)) \end{aligned}$$

Jetzt der Fall $x \neq y$:

Für $a \in U_{\mathcal{A}}$ setze $\rho_a = \rho[y \mapsto a]$. Da $[x := t]$ für φ zulässig ist, kommt y in t nicht vor. Zunächst erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho_a[x \mapsto \rho_a(t)] &= \rho_a[x \mapsto \rho(t)] \quad \text{da } y \text{ nicht in } t \text{ vorkommt} \\ &= \rho[y \mapsto a][x \mapsto \rho(t)] \\ &= \rho[x \mapsto \rho(t)][y \mapsto a] \quad \text{da } x \neq y \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_{\rho} (\forall y \psi)[x := t] &\iff \mathcal{A} \models_{\rho} \forall y (\psi[x := t]) \text{ (wegen } x \neq y) \\ &\iff \mathcal{A} \models_{\rho_a} \psi[x := t] \text{ für alle } a \in U_{\mathcal{A}} \\ &\stackrel{\text{IV}}{\iff} \mathcal{A} \models_{\rho_a[x \mapsto \rho_a(t)]} \psi \text{ für alle } a \in U_{\mathcal{A}} \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{\iff} \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)][y \mapsto a]} \psi \text{ für alle } a \in U_{\mathcal{A}} \\ &\iff \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \forall y \psi \end{aligned}$$

- $\varphi = \exists y \psi$: analog



Natürliches Schließen

Wir haben Regeln des natürlichen Schließens für aussagenlogische Formeln untersucht und für gut befunden. Man kann sie natürlich auch für prädikatenlogische Formeln anwenden.

Beispiel

Für alle Σ -Formel φ und ψ gibt es eine Deduktion mit Hypothesen in $\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\}$ und Konklusion $\neg(\varphi \vee \psi)$:

$$\frac{\frac{\frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\varphi} (\wedge E_1) \quad [\varphi]^1}{\perp} (\neg E) \quad \frac{\frac{\frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\psi} (\wedge E_1) \quad [\psi]^1}{\perp} (\neg E)}{(\vee E)^1}}{\frac{\perp}{\neg(\varphi \vee \psi)} (\neg I)^2} [\varphi \vee \psi]^2$$

Korrektheit

Können wir durch mathematische Beweise zu falschen Aussagen kommen?

Können wir durch das natürliche Schließen zu falschen Aussagen kommen?

Existiert eine Menge Γ von Σ -Formeln und eine Σ -Formel φ mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \not\models \varphi$?

Frage (vgl. Folie 4.1)

Gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi$$

bzw.

φ ist Theorem $\implies \varphi$ ist allgemeingültig?

Der Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen (vgl. Folie 4.3) kann ohne große Schwierigkeiten erweitert werden. Man erhält

Lemma V0

Sei Σ eine Signatur, Γ eine Menge von Σ -Formeln und φ eine Σ -Formel.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ , die die Regeln des natürlichen Schließens der Aussagenlogik verwendet. Dann gilt $\Gamma \models \varphi$.

Umgekehrt ist nicht zu erwarten, daß aus $\Gamma \models \varphi$ folgt, daß es eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ gibt, denn die bisher untersuchten Regeln erlauben keine Behandlung von $=$, \forall bzw. \exists . Solche Regeln werden wir jetzt einführen.

Zunächst kümmern wir uns um Atomformeln der Form $t_1 = t_2$. Hierfür gibt es die zwei Regeln (R) und (GfG):

Reflexivität (ausführlich)

Für jeden Term t ist

$$\frac{}{t = t}$$

eine hypothesenlose Deduktion mit Konklusion $t = t$.

Reflexivität (Kurzform)

$$\frac{}{t = t} \text{ (R)}$$

Gleiches-für-Gleiches in mathematischen Beweisen

„Zunächst zeige ich, daß s die Eigenschaft φ hat: ...

Jetzt zeige ich $s = t$: ...

Also haben wir gezeigt, daß t die Eigenschaft φ hat. qed“

Gleiches-für-Gleiches (ausführlich)

Seien s und t Terme und φ Formel, so daß die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig sind.

Sind D und E Deduktionen mit Hypothesen in Γ und Konklusionen $\varphi[x := s]$ bzw. $s = t$, so ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\varphi[x := t]$:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ D \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ E \end{array}}{\varphi[x := s] \quad s = t} \varphi[x := t]$$

Gleiches-für-Gleiches (Kurzform)

$$\frac{\varphi[x := s] \quad s = t}{\varphi[x := t]} \text{ (GfG)}$$

Bedingung: über keine Variable aus s oder t wird in φ quantifiziert

Die folgenden Beispiele zeigen, daß wir bereits jetzt die üblichen Eigenschaften der Gleichheit (Symmetrie, Transitivität, Einsetzen) folgern können.

Beispiel

Seien x Variable, s Term ohne x und $\varphi = (x = s)$.

Da φ quantorenfrei ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig.

Außerdem gelten $\varphi[x := s] = (s = s)$ und $\varphi[x := t] = (t = s)$.

Also ist das folgende eine Deduktion:

$$\frac{\frac{}{s = s} \text{ (R)} \quad s = t}{t = s} \text{ (GfG)}$$

Für alle Terme s und t haben wir also

$$\{s = t\} \vdash t = s.$$

Beispiel

Seien x Variable, r , s und t Terme ohne x und $\varphi = (r = x)$.

Da φ quantorenfrei ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig.

Außerdem gelten $\varphi[x := s] = (r = s)$ und $\varphi[x := t] = (r = t)$.

Also ist das folgende eine Deduktion:

$$\frac{r = s \quad s = t}{r = t} \text{ (GfG)}$$

Für alle Terme r , s und t haben wir also

$$\{r = s, s = t\} \vdash r = t.$$

Beispiel

Seien x Variable, s und t Terme ohne x , f einstelliges Funktionssymbol und $\varphi = (f(s) = f(x))$.

Da φ quatorenfrei ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig.

Außerdem gelten $\varphi[x := s] = (f(s) = f(s))$ und $\varphi[x := t] = (f(s) = f(t))$.

Also ist das folgende eine Deduktion:

$$\frac{\frac{\overline{f(s) = f(s)} \text{ (R)} \quad [s = t]}{f(s) = f(t)} \text{ (GfG)}}{s = t \rightarrow f(s) = f(t)} \text{ (}\rightarrow\text{I)}$$

Lemma V1

Sei Σ eine Signatur, Γ eine Menge von Σ -Formeln und φ eine Σ -Formel.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ , die die Regeln des natürlichen Schließens der Aussagenlogik, (R) und (GfG) verwendet. Dann gilt $\Gamma \models \varphi$.

Beweis: Wir erweitern den Beweis des Korrektheitslemmas (Folie 4.3) bzw. des Lemmas V0, der Induktion über die Größe der Deduktion D verwendete. Wir betrachten nur den Fall, daß D die folgende Form hat:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ E \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ F \end{array}}{\varphi[x := s] \quad s = t} \varphi[x := t] \quad (\text{GfG})$$

Da dies Deduktion ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig, d.h. in φ wird über keine Variable aus s oder t quantifiziert.

E und F kleinere Deduktionen $\xRightarrow{IV} \Gamma \models \varphi[x := s]$ und $\Gamma \models s = t$

Seien \mathcal{A} Σ -Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_{\rho} \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

$\implies \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi[x := s]$ und $\mathcal{A} \models_{\rho} s = t$

\implies (Folie 8.10) $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(s)]} \varphi$ und $\rho(s) = \rho(t)$

(Lemma von Folie 8.10 anwendbar, da die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig sind.)

$\implies \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \varphi$

\implies (Folie 8.10) $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi[x := t]$

Da \mathcal{A} und ρ beliebig waren mit $\mathcal{A} \models_{\rho} \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$ haben wir $\Gamma \models \varphi[x := t]$ gezeigt. □