

1 Strukturen \mathcal{A} mit entscheidbarer Theorie $\text{Th}(\mathcal{A})$:

- $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \cdot)
- $(\mathbb{N}, +, V_k)$ mit $V_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ \max\{k^m \mid k^m \text{ teilt } n\} & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

2 Strukturen \mathcal{A} , deren Theorie $\text{Th}(\mathcal{A})$ unentscheidbar ist:

- $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +, |)$, $(\mathbb{N}, +, \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\})$
- $(\mathbb{N}, +, V_k, V_\ell)$, falls $i = j = 0$ aus $k^i = \ell^j$ folgt
- (Σ^*, \cdot) für $|\Sigma| \geq 2$

Wir zeigen jetzt, daß keine unentscheidbare Theorie semi-entscheidbar ist:

Satz

Sei \mathcal{A} eine Struktur, so daß $\text{Th}(\mathcal{A})$ semi-entscheidbar ist. Dann ist $\text{Th}(\mathcal{A})$ entscheidbar.

Beweis:

Sei B das Komplement von $\text{Th}(\mathcal{A})$, d.h.

$$\begin{aligned}\varphi \in B &\iff \mathcal{A} \not\models \varphi \\ &\iff \mathcal{A} \models \neg\varphi \\ &\iff \neg\varphi \in \text{Th}(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Die Abbildung $\varphi \mapsto \neg\varphi$ ist also eine Reduktion von B auf die semi-entscheidbare Menge $\text{Th}(\mathcal{A})$. Also ist B semi-entscheidbar. Da also $\text{Th}(\mathcal{A})$ und das Komplement B semi-entscheidbar sind, ist $\text{Th}(\mathcal{A})$ entscheidbar (vgl. „Automaten, Sprachen und Komplexität“). □

Korollar

Die Menge $\text{Th}(\mathcal{N})$ der Aussagen φ mit $\mathcal{N} \models \varphi$ ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis:

Klar mit Sätzen auf Folien 10.18 und 11.2. □



K. Gödel
(1906-1978)

Korollar (1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

Sei Γ eine semi-entscheidbare Menge von Sätzen mit $\mathcal{N} \models \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

Dann existiert ein Satz φ mit $\Gamma \not\vdash \varphi$ und $\Gamma \not\vdash \neg\varphi$ (d.h. „ Γ ist nicht vollständig“).

Beweis: Γ semi-entscheidbar

$\implies \{(D, \varphi) \mid D \text{ Deduktion mit Hypothesen in } \Gamma \text{ und Konklusion } \varphi\}$
semi-entscheidbar

$\implies \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$ semi-entscheidbar und (nach Korrektheitssatz)
Teilmenge von $\text{Th}(\mathcal{N})$

$\implies \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\} \subsetneq \text{Th}(\mathcal{N})$ (denn $\text{Th}(\mathcal{N})$ ist nicht semi-entscheidbar)

\implies es gibt Satz φ mit $\mathcal{N} \models \varphi$ und $\Gamma \not\vdash \varphi$

Angenommen, $\Gamma \vdash \neg\varphi$

$\implies \mathcal{N} \models \neg\varphi$, im Widerspruch zu $\mathcal{N} \models \varphi$

\implies $\Gamma \not\vdash \neg\varphi$



Ein 2. Semi-Entscheidungsverfahren für allgemeingültige Formeln

bekanntes Verfahren mittels natürlichem Schließen:

Suche hypothesenlose Deduktion mit Konklusion ψ .

Jetzt **alternatives Verfahren**, das auf den Endlichkeitssatz der Aussagenlogik (Folie 5.21) zurückgreift:

- Berechne aus Σ -Formel ψ eine Menge E von aussagenlogischen Formeln mit

$$E \text{ unerfüllbar} \iff \neg\psi \text{ unerfüllbar} \iff \psi \text{ allgemeingültig}$$

- Suche endliche unerfüllbare Teilmenge E' von E .

Kern des Verfahrens ist es also, aus Σ -Formel φ eine Menge E aussagenlogischer Formeln zu berechnen mit

$$\varphi \text{ unerfüllbar} \iff E \text{ unerfüllbar.}$$

Hierzu werden wir die Formel φ zunächst in zwei Schritten („Gleichungsfreiheit“ und „Skolem-Form“) vereinfachen, wobei die Formel erfüllbar bzw. unerfüllbar bleiben muß.

Definition

Zwei Σ -Formeln φ und ψ heißen **erfüllbarkeitsäquivalent**, wenn gilt:

$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \iff \psi \text{ ist erfüllbar}$$

Unsere Vereinfachungen müssen also erfüllbarkeitsäquivalente Formeln liefern.

Elimination von Gleichungen

Definition

Eine Σ -Formel ist **gleichungsfrei**, wenn sie keine Teilformel der Form $s = t$ enthält.

Ziel: Aus einer Σ -Formel φ soll eine erfüllbarkeitsäquivalente gleichungsfreie Formel φ' berechnet werden.

Bemerkung: Man kann i.a. keine äquivalente gleichungsfreie Formel φ' angeben, da es eine solche z.B. zu $\varphi = (\forall x \forall y : x = y)$ nicht gibt.

Idee: Die Formel φ' entsteht aus φ , indem alle Teilformeln der Form $x = y$ durch $Gl(x, y)$ ersetzt werden, wobei Gl ein neues Relationssymbol ist.

Notationen

- Sei $\Sigma = (\Omega, \text{Rel}, \text{ar})$ endliche Signatur und φ Σ -Formel.
- $\Sigma_{\text{Gl}} = (\Omega, \text{Rel} \uplus \{\text{Gl}\}, \text{ar}_{\text{Gl}})$ mit $\text{ar}_{\text{Gl}}(f) = \text{ar}(f)$ für alle $f \in \Omega \cup \text{Rel}$ und $\text{ar}_{\text{Gl}}(\text{Gl}) = 2$.
- Für eine Σ -Formel φ bezeichnet φ_{Gl} die Σ_{Gl} -Formel, die aus φ entsteht, indem alle Vorkommen von Teilformeln $s = t$ durch $\text{Gl}(s, t)$ ersetzt werden.

Behauptung

φ erfüllbar $\implies \varphi_{\text{Gl}}$ erfüllbar

Beweis φ erfüllbar

\implies es gibt Σ -Struktur \mathcal{A} und Variableninterpretation ρ mit $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$

Wir definieren eine Σ_{Gl} -Struktur \mathcal{B} wie folgt:

- $U_{\mathcal{B}} = U_{\mathcal{A}}$,
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}}$ für alle $f \in \Omega$,
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}}$ für alle $R \in \text{Rel}$ und
- $\text{Gl}^{\mathcal{B}} = \{(a, a) \mid a \in U_{\mathcal{B}}\}$, d.h. $\text{Gl}^{\mathcal{B}}$ ist die Gleichheit auf $U_{\mathcal{B}}$.

Dann gilt offensichtlich

$$\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi \iff \mathcal{B} \models_{\rho} \varphi_{\text{Gl}}.$$

Also ist φ_{Gl} erfüllbar. □

Behauptung

Es gilt nicht: φ erfüllbar $\iff \varphi_{GI}$ erfüllbar.

Beweis: Betrachte die Formel $\varphi = \exists x \neg(x = x)$, die offensichtlich unerfüllbar ist.

Dann ist aber $\varphi_{GI} = \exists x \neg GI(x, x)$. Sei \mathcal{B} Σ_{GI} -Struktur mit $GI^{\mathcal{B}} = \emptyset$. Dann gilt $\mathcal{B} \models \varphi_{GI}$, also ist φ_{GI} erfüllbar. \square

Ähnlich führen die folgenden Formeln zu einem Beweis dieser Behauptung:

- $\varphi = \exists x, y (x = y \wedge y \neq x)$ (wähle $GI^{\mathcal{B}}$ nicht symmetrisch)
- $\varphi = \exists x, y, z (x = y \wedge y = z \wedge x \neq z)$ (wähle $GI^{\mathcal{B}}$ nicht transitiv)
- $\varphi = \exists x, y (x = y \wedge f(x) \neq f(y))$
- $\varphi = \exists x, y, z (x = y \wedge E(x, z) \wedge \neg E(y, z))$

denn die Formel φ_{GI} fordert nicht, daß $GI^{\mathcal{B}}$ eine „Kongruenz“ sei.

Definition

Sei \mathcal{A} eine Σ -Struktur und \sim eine binäre Relation auf $U_{\mathcal{A}}$. Die Relation \sim heißt **Kongruenz auf \mathcal{A}** , wenn gilt:

- \sim ist eine Äquivalenzrelation (d.h. reflexiv, transitiv und symmetrisch)
- für alle $f \in \Omega$ mit $k = \text{ar}(f)$ und alle $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in U_{\mathcal{A}}$ gilt

$$a_1 \sim b_1, a_2 \sim b_2, \dots, a_k \sim b_k \implies f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k) \sim f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_k)$$

- für alle $R \in \text{Rel}$ mit $k = \text{ar}(R)$ und alle $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in U_{\mathcal{A}}$ gilt

$$a_1 \sim b_1, \dots, a_k \sim b_k, (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \implies (b_1, \dots, b_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

Beispiel:

- 1 Ist \mathcal{A} Struktur, so ist die Gleichheit $=$ eine Kongruenz auf \mathcal{A} .
- 2 Sei $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und für $a, b \in \mathbb{Z}$ gelte

$$a \sim b \iff |a - b| \text{ ist Vielfaches von } 17.$$

Dann ist \sim eine Kongruenz auf \mathcal{Z} .

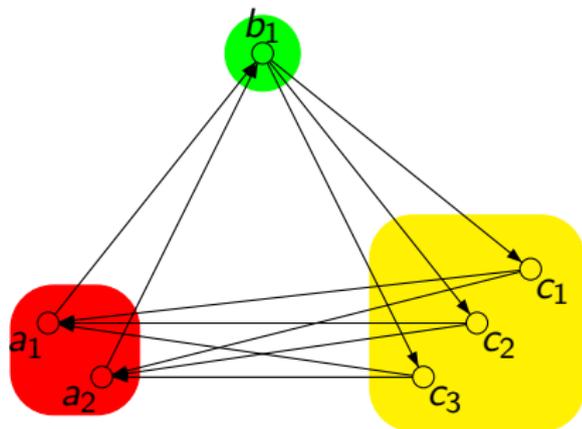
- 3 Sei $U_{\mathcal{A}} = \{a_1, a_2, b_1, c_1, c_2, c_3\}$ und

$$E^{\mathcal{A}} = \{(a_i, b_1), (b_1, c_j), (c_j, a_i) \mid 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3\}.$$

Dann ist die folgende Relation \sim eine Kongruenz:

$$\{(a_i, a_j), (b_1, b_1), (c_k, c_\ell) \mid 1 \leq i, j \leq 2, 1 \leq k, \ell \leq 3\}.$$

Veranschaulichung des letzten Beispiels:



Definition

Sei \mathcal{A} eine Σ -Struktur und \sim eine Kongruenz auf \mathcal{A} .

- 1 Für $a \in U_{\mathcal{A}}$ sei $[a] = \{b \in U_{\mathcal{A}} \mid a \sim b\}$ die **Äquivalenzklasse** von a bzgl. \sim .
- 2 Dann definieren wir den **Quotienten** $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\sim$ von \mathcal{A} bzgl. \sim wie folgt:

- $U_{\mathcal{B}} = U_{\mathcal{A}}/\sim = \{[a] \mid a \in U_{\mathcal{A}}\}$
- Für jedes $f \in \Omega$ mit $\text{ar}(f) = k$ und alle $a_1, \dots, a_k \in U_{\mathcal{A}}$ setzen wir

$$f^{\mathcal{B}}([a_1], \dots, [a_k]) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k)].$$

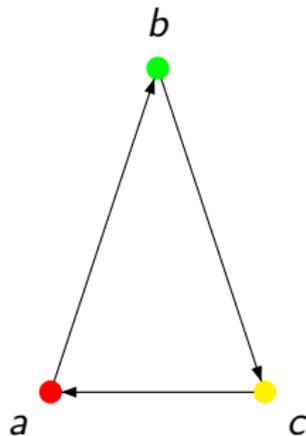
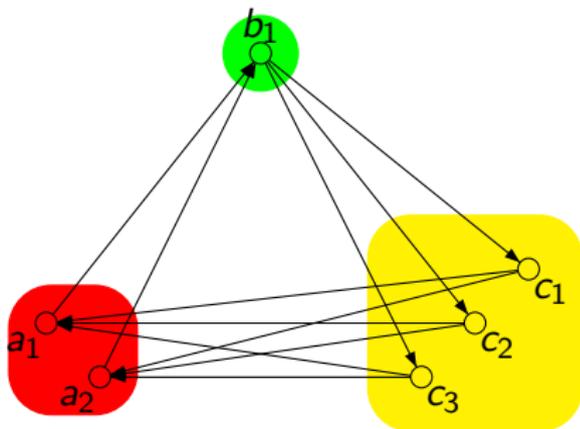
- Für jedes $R \in \text{Rel}$ mit $\text{ar}(R) = k$ setzen wir

$$R^{\mathcal{B}} = \{([a_1], [a_2], \dots, [a_k]) \mid (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}\}.$$

- 3 Sei $\rho: \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation. Dann definiere die Variableninterpretation

$$\rho/\sim: \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{B}}: x \mapsto [\rho(x)].$$

Veranschaulichung am letzten Beispiel:



Lemma 1

Sei \mathcal{A} Struktur, $\rho: \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation und \sim Kongruenz.
Seien weiter $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\sim$ und $\rho_{\mathcal{B}} = \rho/\sim$. Dann gilt für jeden Term t :

$$[\rho(t)] = \rho_{\mathcal{B}}(t).$$

Beweis: per Induktion über den Aufbau des Terms t :

I.A. $t = x$ ist Variable. Dann gilt

$$[\rho(t)] = [\rho(x)] = \rho_{\mathcal{B}}(x) = \rho_{\mathcal{B}}(t)$$

nach Definition der Variableninterpretation $\rho_{\mathcal{B}}$.

I.S. Sei $t = f(t_1, \dots, t_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [\rho(t)] &= [f^{\mathcal{A}}(\rho(t_1), \dots, \rho(t_k))] \\ &= f^{\mathcal{B}}([\rho(t_1)], \dots, [\rho(t_k)]) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} f^{\mathcal{B}}(\rho_{\mathcal{B}}(t_1), \dots, \rho_{\mathcal{B}}(t_k)) \\ &= \rho_{\mathcal{B}}(t). \end{aligned}$$



Lemma 2

Sei \mathcal{A} Σ -Struktur, \sim Kongruenz und $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\sim$. Dann gilt für alle $R \in \text{Rel}$ mit $k = \text{ar}(R)$ und alle $c_1, \dots, c_k \in U_{\mathcal{A}}$:

$$([c_1], [c_2], \dots, [c_k]) \in R^{\mathcal{B}} \iff (c_1, c_2, \dots, c_k) \in R^{\mathcal{A}}.$$

Beweis:

„ \Leftarrow “: klar nach Definition von $R^{\mathcal{B}}$

„ \Rightarrow “: Sei $([c_1], \dots, [c_k]) \in R^{\mathcal{B}}$

\implies es gibt $(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$ mit $([a_1], \dots, [a_k]) = ([c_1], \dots, [c_k])$

$\implies a_1 \sim c_1, \dots, a_k \sim c_k$

$\implies (c_1, \dots, c_k) \in R^{\mathcal{A}}$ da \sim Kongruenz ist. □

Satz

Seien \mathcal{A} Σ_{Gl} -Struktur und $\rho: \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, so daß $\sim = \text{Gl}^{\mathcal{A}}$ Kongruenz auf \mathcal{A} ist.

Seien $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\sim$ und $\rho_{\mathcal{B}} = \rho/\sim$.

Dann gilt für alle Σ -Formeln φ :

$$\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_{\text{Gl}} \iff \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi.$$

Beweis: per Induktion über den Aufbau der Formel φ .

I.A. φ ist atomare Formel:

- $\varphi = R(t_1, \dots, t_k)$ für Terme t_1, \dots, t_k . Dann gelten $\varphi = \varphi_{\text{Gl}}$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_{\text{Gl}} &\iff (\rho(t_1), \dots, \rho(t_k)) \in R^{\mathcal{A}} \\ &\iff ([\rho(t_1)], \dots, [\rho(t_k)]) \in R^{\mathcal{B}} \text{ (Lemma 2)} \\ &\iff (\rho_{\mathcal{B}}(t_1), \dots, \rho_{\mathcal{B}}(t_k)) \in R^{\mathcal{B}} \text{ (Lemma 1)} \\ &\iff \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi \end{aligned}$$

- $\varphi = (s = t)$ für Terme s und t und damit $\varphi_{Gl} = Gl(s, t)$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_{Gl} &\iff (\rho(s), \rho(t)) \in Gl^{\mathcal{A}} \\
 &\iff \rho(s) \sim \rho(t) \\
 &\iff [\rho(s)] = [\rho(t)] \\
 &\iff \rho_{\mathcal{B}}(s) = \rho_{\mathcal{B}}(t) \\
 &\iff \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi
 \end{aligned}$$

I.S.

- $\varphi = \alpha \wedge \beta$: Dann gilt $\varphi_{Gl} = \alpha_{Gl} \wedge \beta_{Gl}$ und damit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_{Gl} &\iff \mathcal{A} \models_{\rho} \alpha_{Gl} \text{ und } \mathcal{A} \models_{\rho} \beta_{Gl} \\
 &\stackrel{IV}{\iff} \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \alpha \text{ und } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \beta \\
 &\iff \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi
 \end{aligned}$$

- $\varphi = \alpha \vee \beta$: analog
- $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$: analog
- $\varphi = \neg\alpha$: analog

- $\varphi = \exists x \alpha$: Dann gilt $\varphi_{G1} = \exists x \alpha_{G1}$ und damit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_{G1} &\iff \text{es gibt } a \in U_{\mathcal{A}} \text{ mit } \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \alpha_{G1} \\
 &\stackrel{\text{IV}}{\iff} \text{es gibt } a \in U_{\mathcal{A}} \text{ mit } \mathcal{B} \models_{(\rho[x \mapsto a])/\sim} \alpha \\
 &\iff \text{es gibt } a \in U_{\mathcal{A}} \text{ mit } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}[x \mapsto [a]]} \alpha \\
 &\quad (\text{denn } (\rho[x \mapsto a])/\sim = \rho_{\mathcal{B}}[x \mapsto [a]]) \\
 &\iff \text{es gibt } b \in U_{\mathcal{B}} \text{ mit } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}[x \mapsto b]} \alpha \\
 &\iff \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi
 \end{aligned}$$

- $F = \forall x \alpha$: analog. □

Lemma

Aus einer endlichen Signatur Σ kann ein gleichungsfreier Horn-Satz Kong_Σ über Σ_{Gl} berechnet werden, so daß für alle Σ_{Gl} -Strukturen \mathcal{A} gilt:

$$\mathcal{A} \models \text{Kong}_\Sigma \iff \text{Gl}^{\mathcal{A}} \text{ ist eine Kongruenz.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \forall x: \text{Gl}(x, x) \wedge \forall x, y: (\text{Gl}(x, y) \rightarrow \text{Gl}(y, x)) \\ \wedge & \quad \forall x, y, z: (\text{Gl}(x, y) \wedge \text{Gl}(y, z) \rightarrow \text{Gl}(x, z)) \\ \wedge & \quad \bigwedge_{f \in \Omega} \forall \vec{x}, \vec{y}: \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq \text{ar}(f)} \text{Gl}(x_i, y_i) \rightarrow \text{Gl}(f(\vec{x}), f(\vec{y})) \right) \\ \wedge & \quad \bigwedge_{R \in \text{Rel}} \forall \vec{x}, \vec{y}: \left(\left(R(\vec{x}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq \text{ar}(R)} \text{Gl}(x_i, y_i) \right) \rightarrow R(\vec{y}) \right) \end{aligned}$$

□

Satz

Aus einer endlichen Signatur Σ und einer Σ -Formel φ kann eine gleichungsfreie und erfüllbarkeitsäquivalente Σ_{GI} -Formel φ' berechnet werden.

Ist φ Horn-Formel, so ist auch φ' Horn-Formel.

Beweis:

Setze $\varphi' = \varphi_{GI} \wedge \text{Kong}_{\Sigma}$.

wir zeigen: φ erfüllbar $\iff \varphi'$ erfüllbar

„ \implies “: Seien \mathcal{A} Σ -Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$. Sei $\mathcal{B} = (\mathcal{A}, =)$ die auf Folie 11.9 konstruierte Σ_{GI} -Struktur. Dann gilt offensichtlich $\mathcal{B} \models_{\rho} \varphi_{GI} \wedge \text{Kong}_{\Sigma}$, d.h. φ' ist erfüllbar.

„ \impliedby “: Seien \mathcal{A} Σ_{GI} -Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi'$

$\implies GI^{\mathcal{A}} =: \sim$ ist Kongruenz auf \mathcal{A} (Lemma auf Folie 11.21)

$\implies \mathcal{A}/\sim \models_{\rho/\sim} \varphi$ (Satz auf Folie 11.18)

Also ist φ erfüllbar.

