Skolemform

Ziel: Jede Σ-Formel φ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu einer Σ'-Formel

$$\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k \, \psi \, ,$$

wobei ψ kein Quantoren enthält, φ' heißt in Skolemform.

Bemerkung: Betrachte die Formel $\exists x \exists y \, E(x,y)$. Es gibt keine Formel in Skolemform, die hierzu äquivalent ist.

2 Schritte: 1) Quantoren nach vorne (d.h. Pränexform)
2) Existenzquantoren eliminieren

Definition

Zwei Σ-Formeln φ und ψ sind äquivalent (kurz: $\varphi \equiv \psi$), wenn für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle Variableninterpretationen ρ gilt

$$\mathcal{A} \models_\rho \varphi \iff \mathcal{A} \models_\rho \psi \, .$$

Lemma

Seien $Q \in \{\exists, \forall\}$ *und* $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow\}$.
Sei $\varphi = (Qx\, \alpha) \oplus \beta$ *und sei* y *eine Variable, die weder in* α *noch in* β *vorkommt. Dann gilt*

$$\varphi \equiv \begin{cases} Qy\,(\alpha[x := y] \oplus \beta) & \textit{falls } \oplus \in \{\wedge, \vee, \leftarrow\} \\ \forall y\,(\alpha[x := y] \rightarrow \beta) & \textit{falls } \oplus = \rightarrow, Q = \exists \\ \exists y\,(\alpha[x := y] \rightarrow \beta) & \textit{falls } \oplus = \rightarrow, Q = \forall \end{cases}$$

Notwendigkeit der Bedingung „y kommt weder in α noch in β vor“:

- $(\exists x\colon f(x) \neq f(y)) \wedge \beta \not\equiv \exists y\colon (f(y) \neq f(y) \wedge \beta)$
- $(\exists x\colon \neg P(x)) \wedge P(y) \not\equiv \exists y\colon (\neg P(y) \wedge P(y))$

Lemma

Seien $Q \in \{\exists, \forall\}$ und $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow\}$.
Sei $\varphi = (Qx\,\alpha) \oplus \beta$ und sei y eine Variable, die weder in α noch in β vorkommt. Dann gilt

$$\varphi \equiv \begin{cases} Qy\,(\alpha[x := y] \oplus \beta) & \textit{falls } \oplus \in \{\wedge, \vee, \leftarrow\} \\ \forall y\,(\alpha[x := y] \rightarrow \beta) & \textit{falls } \oplus = \rightarrow, Q = \exists \\ \exists y\,(\alpha[x := y] \rightarrow \beta) & \textit{falls } \oplus = \rightarrow, Q = \forall \end{cases}$$

Beweis: (für den Fall $Q = \exists$ und $\oplus = \wedge$)
Seien $\mathcal{A}$ Σ-Struktur und ρ Variableninterpretation.
Für $a \in U_{\mathcal{A}}$ setze $\rho_a := \rho[y \mapsto a]$.
Dann gilt

$$\rho_a[x \mapsto \rho_a(y)](z) = \rho[x \mapsto a](z) \text{ für alle } z \neq y \qquad (*)$$

Wir erhalten also

$\mathcal{A} \models_\rho (\exists x\, \alpha) \wedge \beta$

$\iff$ $\mathcal{A} \models_\rho (\exists x\, \alpha)$ und $\mathcal{A} \models_\rho \beta$

$\iff$ (es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \alpha$) und (es gilt $\mathcal{A} \models_\rho \beta$)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit ($\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \alpha$ und $\mathcal{A} \models_\rho \beta$)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit

- $\mathcal{A} \models_{\rho_a[x \mapsto \rho_a(y)]} \alpha$ (nach (*), da y in α nicht vorkommt)
- $\mathcal{A} \models_{\rho_a} \beta$ (da y in β nicht vorkommt)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit

- $\mathcal{A} \models_{\rho_a} \alpha[x := y]$ (Folie 8.10)
- $\mathcal{A} \models_{\rho_a} \beta$

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[y \mapsto a]} \alpha[x := y] \wedge \beta$

$\iff$ $\mathcal{A} \models_\rho \exists y\, (\alpha[x := y] \wedge \beta)$

Die Fälle $Q = \forall$ bzw. $\oplus = \vee$ werden analog behandelt.

Der Fall $\oplus = \rightarrow$, $Q = \exists$:

$$\begin{aligned}
(\exists x\, \alpha) \rightarrow \beta &\equiv \neg(\exists x\, \alpha) \vee \beta \\
&\equiv \neg(\neg\forall x\, \neg\alpha) \vee \beta \\
&\equiv (\forall x\, \neg\alpha) \vee \beta \\
&\equiv \forall y\, (\neg\alpha[x := y] \vee \beta) \\
&\equiv \forall y\, (\alpha[x := y] \rightarrow \beta)
\end{aligned}$$

Die restlichen Fälle sind analog. $\square$

Satz

Aus einer endlichen Signatur Σ und einer Σ-Formel φ kann eine äquivalente Σ-Formel

$$\varphi' = Q_1 x_1\, Q_2 x_2\, \dots Q_k x_k\, \psi$$

(mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, ψ quantorenfrei und x_i paarweise verschieden) berechnet werden. Eine Formel φ' dieser Form heißt in Pränexform.

Ist φ gleichungsfrei, so ist auch φ' gleichungsfrei.

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv über den Aufbau von φ:
I.A. φ ist atomare Formel: Setze $\varphi' = \varphi$.

I.S.

- $\varphi = \neg\psi$: Nach I.V. kann Formel in Pränexform

$$\psi \quad \equiv \quad Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi'$$

berechnet werden. Mit $\overline{\forall} = \exists$ und $\overline{\exists} = \forall$ setze

$$\varphi' = \overline{Q_1} x_1\, \overline{Q_2} x_2 \ldots \overline{Q_m}\, x_m\, \neg\psi' \,.$$

- $\varphi = \exists x\, \psi$: Nach I.V. kann Formel in Pränexform

$$\psi \quad \equiv \quad Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi'$$

berechnet werden. Setze

$$\varphi' = \begin{cases} \exists x\, Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi' & \text{falls } x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \\ Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi' & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\varphi = \alpha \wedge \beta$: Nach I.V. können Formeln in Pränexform

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_0\\ \beta &\equiv Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0\end{aligned}$$

berechnet werden. Seien $z_1, z_2, \ldots, z_{m+n}$ neue Variable.

$$\begin{aligned}\varphi &= \alpha \wedge \beta\\ &\equiv (Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_0) \wedge (Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0)\\ &\equiv Q_1 z_1 \left(\begin{array}{ll} & (Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_0)[x_1 := z_1] \\ \wedge & Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0 \end{array} \right)\\ &\equiv Q_1 z_1 \left(\begin{array}{ll} & Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_1 \\ \wedge & Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0 \end{array} \right)\\ &\qquad \text{mit } \alpha_1 = \alpha_0[x_1 := z_1]\\ &\vdots\\ &\equiv Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m\, Q'_1 z_{m+1} \ldots Q'_n z_{m+n}\, (\alpha_m \wedge \beta_n)\end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x\, \psi$: analog zum Fall $\varphi = \exists x\, \psi$
- $\varphi = \alpha \vee \beta$: analog zum Fall $\varphi = \alpha \wedge \beta$
- $\varphi = \alpha \to \beta$: analog zum Fall $\varphi = \alpha \wedge \beta$ (es ändern sich die Quantoren in α!) $\square$

Ziel: Berechnung einer erfüllbarkeitsäquivalenten Formel in Skolemform

Idee:

1. wandle Formel in Pränexform um
2. eliminiere $\exists$-Quantoren durch Einführen neuer Funktionssymbole

Konstruktion: Sei $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \exists y \, \psi$ Formel in Pränexform (u.U. enthält ψ weitere Quantoren).

Sei $g \notin \Omega$ ein neues m-stelliges Funktionssymbol.

Setze $\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \, \psi[y := g(x_1, \dots, x_m)]$.

Offensichtlich hat φ' einen Existenzquantor weniger als φ. Außerdem ist φ' keine Σ-Formel (denn sie verwendet $g \notin \Omega$), sondern Formel über einer erweiterten Signatur.

Lemma

Die Formeln φ und φ' sind erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis: „$\Leftarrow$“ Sei $\mathcal{A}'$ Struktur und ρ' Variableninterpretation mit $\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi'$. Wir zeigen $\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi$. Hierzu seien $a_1, \ldots, a_m \in U_{\mathcal{A}'}$ beliebig. Setze

$$\overline{\rho} = \rho'[x_1 \mapsto a_1][x_2 \mapsto a_2] \cdots [x_m \mapsto a_m]$$

und $b = g^{\mathcal{A}'}(a_1, \ldots, a_m)$.

Dann gilt
$\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi'$
$\Longrightarrow \mathcal{A}' \models_{\overline{\rho}} \psi[y := g(x_1, \ldots, x_m)]$
$\Longrightarrow$ (Folie 8.10) $\mathcal{A}' \models_{\overline{\rho}[y \mapsto b]} \psi$
$\Longrightarrow \mathcal{A}' \models_{\overline{\rho}} \exists y\, \psi$
Da $a_1, \ldots, a_m$ beliebig sind, haben wir $\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi$ gezeigt.

„$\Rightarrow$“ Sei nun $\mathcal{A}$ Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$.

Zunächst definieren wir eine Funktion $G\colon U_\mathcal{A}^m \to U_\mathcal{A}$: seien $a_1, a_2, \ldots, a_m \in U_\mathcal{A}$ beliebig
$\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m]} \exists y\, \psi$

$\Longrightarrow$ es gibt $b \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m][y \mapsto b]} \psi$

Setze $G(a_1, \ldots, a_m) := b$, womit die Definition der Funktion G abgeschlossen ist.

Definiere eine neue Struktur $\mathcal{A}'$ über der Signatur $(\Omega \uplus \{g\}, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$ mit

- $U_{\mathcal{A}'} = U_{\mathcal{A}}$,
- $f^{\mathcal{A}'} = f^{\mathcal{A}}$ für alle Funktionssymbole $f \in \Omega$,
- $R^{\mathcal{A}'} = R^{\mathcal{A}}$ für alle $R \in \mathrm{Rel}$ und
- $g^{\mathcal{A}'} = G$.

Seien nun $a_1, \ldots, a_m \in U_{\mathcal{A}}$ beliebig.
Dann gilt
$\mathcal{A} \models_\rho \varphi$
$\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m]} \exists y\, \psi$
$\xRightarrow{\text{Definition von } G} \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m][y \mapsto G(a_1,\ldots,a_m)]} \psi$
$\Longrightarrow$ (Folie 8.10) $\mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m]} \psi[y := g(x_1, \ldots, x_m)]$

Da das Tupel $a_1, \ldots, a_m$ beliebig war, haben wir $\mathcal{A}' \models_\rho \varphi'$ gezeigt, d.h. φ' ist erfüllbar. $\square$

Satz

Aus einer Formel φ kann man eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $\overline{\varphi}$ in Skolemform berechnen.
Ist φ gleichungsfrei, so auch $\overline{\varphi}$.

Beweis: Nach Folie 12.5 kann zu φ äquivalente Formel

$$\varphi_0 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_\ell x_\ell \, \psi$$

in Pränexform berechnet werden (mit $n \leq \ell$ Existenzquantoren). Durch wiederholte Anwendung des vorherigen Lemmas erhält man Formeln φ_1, $\varphi_2, \dots \varphi_n$ mit

- φ_i und φ_{i+1} sind erfüllbarkeitsäquivalent
- φ_{i+1} enthält einen Existenzquantor weniger als φ_i
- φ_{i+1} ist in Pränexform
- ist φ_i gleichungsfrei, so auch φ_{i+1}

Dann ist $\overline{\varphi} = \varphi_n$ erfüllbarkeitsäquivalente (ggf. gleichungsfreie) Formel in Skolemform. $\square$

Beispiel

1. Die Skolemform von

$$\varphi_0 \quad = \quad \forall x \exists v \exists w \Big(P(x, h(v, f(x))) \ \vee \ \neg Q(z) \ \vee \ \neg R(w, y) \Big)$$

ergibt sich wie folgt:

$$\varphi_1 \quad = \quad \forall x \exists w \Big(P(x, h(g_1(x), f(x))) \ \vee \ \neg Q(z) \ \vee \ \neg R(w, y) \Big)$$

$$\varphi_2 \quad = \quad \forall x \Big(P(x, h(g_1(x), f(x))) \ \vee \ \neg Q(z) \ \vee \ \neg R(g_2(x), y) \Big)$$

2. Die Skolemform von $\exists x\, P(x)$ ist $P(a)$ für eine neue Konstante a.
   Aber: $(\exists x\, P(x)) \not\equiv (P(a))$.
   Das heißt, der Beweis liefert tatsächlich nur eine erfüllbarkeitsäquivalente, aber i.a. nicht äquivalente Formel (es existiert auch keine äquivalente Formel in Skolemform).

Übersicht

Ziel (Folie 11.5): Allgemeingültigkeitstest
Unerfüllbarkeitstest

erreicht: Wir brauchen einen Unerfüllbarkeitstest für gleichungsfreie Aussagen in Skolemform.

nächster Schritt: besonders „einfache“ Strukturen, die ausreichen, um Unerfüllbarkeit von gleichungsfreien Aussagen in Skolemform zu testen.

Herbrand-Strukturen und Herbrand-Modelle

Sei $\Sigma = (\Omega, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$ eine Signatur. Wir nehmen im folgenden an, daß Ω wenigstens ein Konstantensymbol enthält.

Das Herbrand-Universum $D(\Sigma)$ ist die Menge aller variablenfreien Σ-Terme.

Beispiel: $\Omega = \{b, f\}$ mit $\mathrm{ar}(b) = 0$ und $\mathrm{ar}(f) = 1$. Dann gilt $D(\Sigma) = \{b, f(b), f(f(b)), f(f(f(b))), \ldots\}$

Eine Σ-Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in\Omega}, (R^{\mathcal{A}})_{R\in\mathrm{Rel}})$ ist eine Herbrand-Struktur, falls folgendes gilt:

1. $U_{\mathcal{A}} = D(\Sigma)$,
2. für alle $f \in \Omega$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und alle $t_1, t_2, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$ ist

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = f(t_1, t_2, \ldots, t_k)\,.$$

Für jede Herbrand-Struktur $\mathcal{A}$, alle Variableninterpretationen ρ und alle variablenfreien Terme t gilt dann $\rho(t) = t$.

Ein Herbrand-Modell von φ ist eine Herbrand-Struktur, die gleichzeitig ein Modell von φ ist.

Satz

Sei φ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform.
φ ist genau dann erfüllbar, wenn φ ein Herbrand-Modell besitzt.

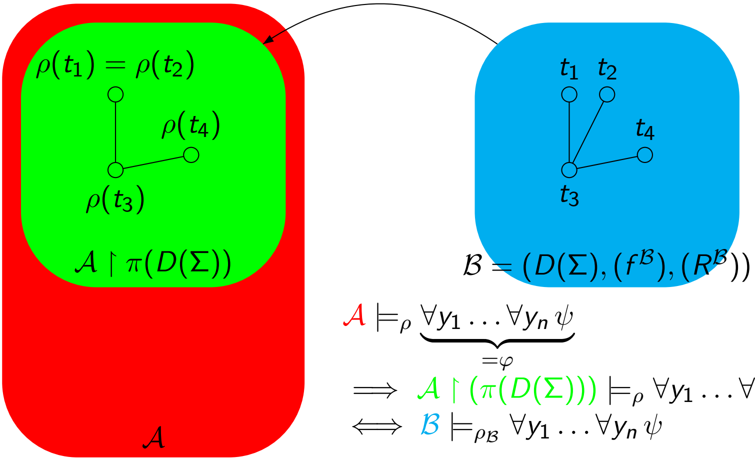
Beweis:

Falls φ ein Herbrand-Modell hat, ist φ natürlich erfüllbar.

Sei nun $\varphi = \forall y_1 \dots \forall y_n\, \psi$ erfüllbar. Dann existieren eine Σ-Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, (f^\mathcal{A})_{f \in \Omega}, (R^\mathcal{A})_{R \in \mathrm{Rel}})$ und eine Variableninterpretation ρ mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$.

Plan des Beweises

$$\begin{array}{rrcl} \pi: & D(\Sigma) & \to & U_{\mathcal{A}} \\ & t & \mapsto & \rho(t) \end{array}$$



$$\mathcal{A} \models_\rho \underbrace{\forall y_1 \ldots \forall y_n\, \psi}_{=\varphi}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A} \restriction (\pi(D(\Sigma))) \models_\rho \forall y_1 \ldots \forall y_n\, \psi$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \forall y_1 \ldots \forall y_n\, \psi$$

Wir definieren nun eine Herbrand-Struktur
$\mathcal{B} = (D(\Sigma), (f^{\mathcal{B}})_{f \in \Omega}, (R^{\mathcal{B}})_{R \in \mathrm{Rel}})$:

- Seien $f \in \Omega$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$. Um eine Herbrand-Struktur $\mathcal{B}$ zu konstruieren setzen wir

$$f^{\mathcal{B}}(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1, \ldots, t_k)$$

- Sei $R \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(R) = k$ und seien $t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$. Dann setze

$$(t_1, \ldots, t_k) \in R^{\mathcal{B}} :\iff (\rho(t_1), \ldots, \rho(t_k)) \in R^{\mathcal{A}} .$$

Sei $\rho_{\mathcal{B}} \colon \mathrm{Var} \to D(\Sigma)$ beliebige Variableninterpretation.

Behauptung 1: Ist ψ eine quantoren- und gleichungsfreie Aussage, so gilt

$$\mathcal{A} \models_\rho \psi \iff \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi\,.$$

Diese Behauptung wird induktiv über den Aufbau von ψ gezeigt.

I.A. ψ ist atomar, d.h. $\psi = R(t_1, \ldots, t_k)$ für ein $R \in \mathrm{Rel}$ und Terme $t_1, \ldots, t_k$: Da ψ Aussage ist, sind die Terme $t_1, \ldots, t_k$ variablenfrei, d.h. $t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\rho \psi \quad &\iff \quad (\rho(t_1), \ldots, \rho(t_k)) \in R^\mathcal{A} \quad \iff \quad (t_1, \ldots, t_k) \in R^\mathcal{B} \\ &\iff \quad (\rho_\mathcal{B}(t_1), \ldots, \rho_\mathcal{B}(t_k)) \in R^\mathcal{B} \quad \iff \quad \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi \end{aligned}$$

I.S.

- $\psi = \neg\alpha$:

$$\mathcal{A} \models_\rho \psi \iff \mathcal{A} \not\models_\rho \alpha \overset{\text{IV}}{\iff} \mathcal{B} \not\models_{\rho_\mathcal{B}} \alpha \iff \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi$$

- $\psi = \alpha \wedge \beta$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\rho \psi \quad & \iff \quad \mathcal{A} \models_\rho \alpha \text{ und } \mathcal{A} \models_\rho \beta \\ & \overset{\text{IV}}{\iff} \quad \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \alpha \text{ und } \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \beta \\ & \iff \quad \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi \end{aligned}$$

- $\varphi = \alpha \vee \beta$: analog.
- $\varphi = \alpha \to \beta$: analog.

Damit ist die Behauptung 1 bewiesen.

Intermezzo: Beh. 1 gilt nur für quantorenfreie Aussagen

$\Sigma = (\Omega, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$ mit $\Omega = \{a\}$, $\mathrm{ar}(a) = 0$ und $\mathrm{Rel} = \{E\}$, $\mathrm{ar}(E) = 2$.

Betrachte die Formel $\varphi = \forall x\,(E(x,x) \wedge E(a,a))$ in Skolemform.

$\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ mit $U_\mathcal{A} = \{a^\mathcal{A}, m\}$ und $E^\mathcal{A} = \{(m,m), (a^\mathcal{A}, a^\mathcal{A})\}$.

Die konstruierte Herbrand-Struktur $\mathcal{B}$: $U_\mathcal{B} = D(\Sigma) = \{a\}$ und $E^\mathcal{B} = \{(a,a)\}$.

Betrachte nun die Formel $\psi = \forall x, y\, E(x,y)$.

Dann gilt $\mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi$ und $\mathcal{A} \not\models_\rho \psi$.

Für allgemeine Formeln in Skolemform (also u.U. mit Quantoren) können wir also Behauptung 1 nicht zeigen, sondern höchstens die folgende Abschwächung.

Behauptung 2: Ist ψ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform, so gilt

$$\mathcal{A} \models_\rho \psi \Longrightarrow \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi\,.$$

(hieraus folgt dann $\mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \varphi$ wegen $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$)

Diese Behauptung wird induktiv über die Anzahl n der Quantoren in ψ bewiesen.

I.A.: $n = 0$:

Aus $\mathcal{A} \models_\rho \psi$ folgt $\mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi$ nach Behauptung 1.

I.S.: Sei $\psi = \forall x\, \psi'$.

Aus $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\, \psi'$ folgt

$$\text{für alle } d \in U_\mathcal{A} \text{ gilt } \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto d]} \psi'\,.$$

Wegen $\rho(t) \in U_\mathcal{A}$ für alle $t \in D(\Sigma)$ folgt

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \psi'\,.$$

Nach Folie 8.10 ergibt sich

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{A} \models_\rho \psi'[x := t]\,.$$

Die Terme $t \in D(\Sigma)$ sind variablenfrei. Also ist $\psi'[x := t]$ eine Aussage. Sie ist wieder in Skolemform und hat nur $n - 1$ Quantoren. Nach der IV erhalten wir

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \psi'[x := t]$$

und damit nach Folie 8.10

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}[x \mapsto \rho_{\mathcal{B}}(t)]} \psi' .$$

Da alle Terme $t \in D(\Sigma)$ variablenfrei sind, gilt $\rho_{\mathcal{B}}(t) = t$ und damit

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}[x \mapsto t]} \psi' .$$

Aus $U_{\mathcal{B}} = D(\Sigma)$ ergibt sich

$$\mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \forall x \, \psi' .$$

Damit ist Behauptung 2 und damit der Satz bewiesen. $\square$

Zwischenbilanz

Folie 11.5: Gesucht ist ein (2.) Semi-Entscheidungsverfahren für die Frage, ob eine geg. Σ-Formel ψ allgemeingültig ist (d.h. ob $\varphi = \neg\psi$ unerfüllbar ist).

Satz auf Folie 12.13: aus φ kann eine erfüllbarkeitsäquivalente gleichungsfreie Σ'-Formel φ' in Skolemform berechnen werden

$\Longrightarrow$ gesucht ist ein Semi-Entscheidungsverfahren für die Unerfüllbarkeit solcher Formeln

Satz auf Folie 12.17: eine solche Formel ist genau dann unerfüllbar, wenn sie *kein* Herbrand-Modell besitzt

$\Longrightarrow$ gesucht ist ein Semi-Entscheidungsverfahren für die *Nicht*-Existenz eines Herbrand-Modells ...

... aber wir haben ja noch ein paar Vorlesungen.