Die Herbrand-Expansion

verbleibende Frage: Wie erkennt man, ob eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform ein Herbrand-Modell hat?

Beispiel: Seien $\Sigma = (\{a, f\}, \{P, R\}, \mathrm{ar})$ und
$\varphi = \forall x\, \forall y\, (P(a, x) \wedge \neg R(f(y)))$.

Jedes Herbrand-Modell $\mathcal{A}$ von φ

- hat als Universum das Herbrand-Universum
  $D(\Sigma) = \{a, f(a), f^2(a), \ldots\} = \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$
- erfüllt $f^{\mathcal{A}}(f^n(a)) = f^{n+1}(a)$ für alle $n \geq 0$

Um ein Herbrand-Modell zu konstruieren, müssen (bzw. können) wir für alle Elemente $s, t, u \in D(\Sigma)$ unabhängig und beliebig wählen, ob $(s, t) \in P^{\mathcal{A}}$ und $u \in R^{\mathcal{A}}$ gilt.

Wir fassen dies als „aussagenlogische $\mathbb{B}$-Belegung“ $\mathcal{B}$ der „aussagenlogischen atomaren Formeln“ $P(s, t)$ bzw. $R(u)$ auf.

Jede solche aussagenlogische $\mathbb{B}$-Belegung $\mathcal{B}$ definiert dann eine Herbrand-Struktur $\mathcal{A}_\mathcal{B}$:

- $P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = \{(s,t) \in D(\Sigma)^2 \mid \mathcal{B}(P(s,t)) = 1\}$
- $R^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = \{u \in D(\Sigma) \mid \mathcal{B}(R(u)) = 1\}$

Mit $\varphi = \forall x\, \forall y\, (P(a,x) \wedge \neg R(f(y)))$ gilt dann

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \varphi & & \\
\iff & \mathcal{A}_\mathcal{B} \models_{\rho[x \mapsto f^m(a)][y \mapsto f^n(a)]} P(a,x) \wedge \neg R(f(y)) & \text{f.a. } m,n \geq 0 \\
\iff & (a, f^m(a)) \in P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} \text{ und } f^{n+1}(a) \notin R^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} & \text{f.a. } m,n \geq 0 \\
\iff & \mathcal{B}(P(a, f^m(a))) = 1 \text{ und } \mathcal{B}(R(f^{n+1}(a))) = 0 & \text{f.a. } m,n \geq 0 \\
\iff & \mathcal{B}(P(a, f^m(a)) \wedge \neg R(f^{n+1}(a))) = 1 & \text{f.a. } m,n \geq 0
\end{array}
$$

Also hat φ genau dann ein Herbrand-Modell, wenn es eine erfüllende $\mathbb{B}$-Belegung $\mathcal{B}$ der Menge aussagenlogischer Formeln

$$E(\varphi) = \{P(a, f^m(a)) \wedge \neg R(f^{n+1}(a)) \mid m,n \geq 0\}$$

gibt.

Beispiellösung: Setzt $\mathcal{B}(P(s,t)) = 1$ und $\mathcal{B}(R(s)) = 0$ für alle $s, t \in D(\Sigma)$.

Diese $\mathbb{B}$-Belegung erfüllt $E(\varphi)$ und „erzeugt" die Herbrand-Struktur $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ mit $P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = D(\Sigma)^2$ und $R^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = \emptyset$.

Nach obiger Überlegung gilt $\mathcal{A}_\mathcal{B} \models \varphi$, wir haben also ein Herbrand-Modell von φ gefunden.

Auf den folgenden Folien wird dieses Verfahren allgemein formuliert und seine Korrektheit bewiesen.

Sei $\varphi = \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n\, \psi$ gleichungsfreie Aussage in Skolemform.

Ziel: Konstruktion einer Menge aussagenlogischer Formeln, die genau dann erfüllbar ist, wenn φ ein Herbrand-Modell hat.

Die Herbrand-Expansion von φ ist die Menge der Aussagen

$$E(\varphi) = \{\psi[y_1 := t_1][y_2 := t_2] \ldots [y_n := t_n] \mid t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(\Sigma)\}$$

Die Formeln von $E(\varphi)$ entstehen also aus ψ, indem die (variablenfreien) Terme aus $D(\Sigma)$ in jeder möglichen Weise in ψ substituiert werden.

Wir betrachten die Herbrand-Expansion von φ im folgenden als eine Menge von aussagenlogischen Formeln.

Die atomaren Formeln sind hierbei von der Gestalt $P(t_1, \ldots, t_k)$ für $P \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(P) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$.

Konstruktion

Sei $\mathcal{B}\colon \{P(t_1, \ldots, t_k) \mid P \in \mathrm{Rel}, k = \mathrm{ar}(P), t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma)\} \to \mathbb{B}$ eine $\mathbb{B}$-Belegung.

Die hiervon induzierte Herbrand-Struktur $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ ist gegeben durch

$$P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = \{(t_1, \ldots, t_k) \mid t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma), \mathcal{B}(P(t_1, \ldots, t_k)) = 1\}$$

für alle $P \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(P) = k$.

Lemma

Für jede quantoren- und gleichungsfreie Aussage α und jede Variableninterpretation ρ in $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ gilt

$$\mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \alpha \iff \mathcal{B}(\alpha) = 1\,.$$

Beweis: per Induktion über den Aufbau von α:

I.A. α ist atomar, d.h. $\alpha = P(t_1, \ldots, t_k)$ mit $t_1, \ldots, t_k$ variablenlos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \alpha &\iff (\rho(t_1), \rho(t_2), \ldots, \rho(t_k)) \in P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} \\ &\overset{\rho(t_i)=t_i}{\iff} (t_1, \ldots, t_k) \in P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} \\ &\iff \mathcal{B}(P(t_1, \ldots, t_k)) = 1 \\ &\iff \mathcal{B}(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

I.S.

- $\alpha = \beta \wedge \gamma$: $\quad \begin{aligned}[t] \mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \alpha &\iff \mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \beta \text{ und } \mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \gamma \\ &\overset{\text{I.V.}}{\iff} \mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}(\gamma) = 1 \\ &\iff \mathcal{B}(\alpha) = 1 \end{aligned}$
- $\alpha = \beta \vee \gamma$: analog
- $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$: analog
- $\alpha = \neg\beta$: analog $\square$

Lemma

Sei $\varphi = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \psi$ gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Sie hat genau dann ein Herbrand-Modell, wenn die Formelmenge $E(\varphi)$ (im aussagenlogischen Sinn) erfüllbar ist.

Beweis: Seien $\mathcal{A}$ Herbrand-Struktur und ρ Variableninterpretation. Sei $\mathcal{B}$ die $\mathbb{B}$-Belegung mit $\mathcal{B}(P(t_1, \dots, t_k)) = 1 \iff (t_1, \dots, t_k) \in P^{\mathcal{A}}$ für alle $P \in \mathrm{Rel}$ mit $k = \mathrm{ar}(P)$ und $t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma)$. Dann gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$.

$\mathcal{A} \models_\rho \varphi$

$\iff$ für alle $t_1, t_2, \dots, t_n \in D(\Sigma)$ gilt $\mathcal{A} \models_{\rho[y_1 \mapsto t_1][y_2 \mapsto t_2] \dots [y_n \mapsto t_n]} \psi$

$\iff$ (Folie 8.10) für alle $t_1, t_2, \dots, t_n \in D(\Sigma)$ gilt
$$\mathcal{A} \models_\rho \psi[y_n := t_n] \dots [y_2 := t_2][y_1 := t_1]$$

$\iff$ für alle $\alpha \in E(\varphi)$ gilt $\mathcal{A} \models_\rho \alpha$

$\iff$ $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in E(\varphi)$ $\square$

Satz von Gödel-Herbrand-Skolem

Sei φ gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Sie ist genau dann erfüllbar, wenn die Formelmenge $E(\varphi)$ (im aussagenlogischen Sinn) erfüllbar ist.

Beweis:

φ erfüllbar

$\Leftrightarrow$ (Folie 12.17) φ hat ein Herbrand-Modell

$\xLeftrightarrow{\text{Lemma oben}}$ $E(\varphi)$ ist im aussagenlogischen Sinne erfüllbar. $\square$

Satz von Herbrand

Eine gleichungsfreie Aussage φ in Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine endliche Teilmenge von $E(\varphi)$ gibt, die (im aussagenlogischen Sinn) unerfüllbar ist.

Jacques Herbrand
(1908-1931)

Beweis: φ unerfüllbar
$\Leftrightarrow$ (Folie 13.8) $E(\varphi)$ unerfüllbar
$\Leftrightarrow$ (Folie 5.21) es gibt $M \subseteq E(\varphi)$ endlich und unerfüllbar $\square$

Algorithmus von Gilmore

Sei φ gleichungsfreie Aussage in Skolemform und sei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ eine Aufzählung von $E(\varphi)$.

Algorithmus von Gilmore

Eingabe: φ
$n := 0$;
repeat $n := n + 1$;
until $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ist unerfüllbar;
(dies kann mit Mitteln der Aussagenlogik, z.B. Wahrheitswertetabelle, getestet werden)
Gib „unerfüllbar" aus und stoppe.

Folgerung

Sei φ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Dann gilt:

- Wenn die Eingabeformel φ unerfüllbar ist, dann terminiert der Algorithmus von Gilmore und gibt „unerfüllbar“ aus.
- Wenn die Eingabeformel φ erfüllbar ist, dann terminiert der Algorithmus von Gilmore *nicht*, d.h. er läuft unendlich lange.

Beweis: unmittelbar mit Satz von Herbrand (Folie 13.9) $\square$

Zusammenfassung

Auf Folie 11.5 fragten wir nach einem alternativen Semi-Entscheidungsverfahren für die Menge der allgemeingültigen Formeln. Dieses haben wir jetzt:

- Berechne aus ψ eine zu $\neg\psi$ erfüllbarkeitsäquivalente gleichungsfreie Formel φ in Skolemform.
- Suche mit dem Algorithmus von Gilmore nach einer endlichen Teilmenge E' von $E(\varphi)$, die unerfüllbar ist.