Berechnung von Lösungen

Beispiel

$$\begin{aligned}\gamma &= \forall x, y\, (R(x, f(y)) \wedge R(g(x), y)) \\ \varphi &= \forall x, y\, R(x, y)\end{aligned}$$

Gilt $\{\gamma\} \models \varphi$? nein, denn $\mathcal{A} \models \gamma \wedge \neg\varphi$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (\mathbb{N}, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, R) \\ f^{\mathcal{A}}(n) = g^{\mathcal{A}}(n) &= n + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ R^{\mathcal{A}} &= \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}\end{aligned}$$

Gibt es variablenfreie Terme s und t mit $\{\gamma\} \models R(s, t)$?

ja: z.B. $(s, t) = (g(f(a)), g(a))$ oder $(s, t) = (g(a), g(a))$ oder
$(s, t) = (a, f(b))$

Kann die Menge aller Termpaare (s, t) (d.h. aller „Lösungen“) mit $\{\gamma\} \models R(s, t)$ effektiv und übersichtlich angegeben werden?

Wegen

$$\{\gamma\} \models R(s, t) \iff \gamma \wedge \neg R(s, t) \text{ unerfüllbar}$$

ist die gesuchte Menge der variablenfreien Terme (s, t) semi-entscheidbar, d.h. durch eine Turing-Maschine beschrieben.

Im Rest des Logikteils der Vorlesung „Logik und Logikprogrammierung“ wollen wir diese Menge von Termpaaren „besser“ beschreiben (zumindest in einem Spezialfall, der die Grundlage der logischen Programmierung bildet).

Erinnerung

Eine Horn-Klausel der Prädikatenlogik ist eine Aussage der Form

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \, \forall x_n \; ((\neg\bot \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \to \beta) \; ,$$

mit $m \geq 0$, atomaren Formeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und β atomare Formel oder $\bot$.

Aufgabe

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gleichungsfreie Horn-Klauseln, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) = R(t_1, \ldots, t_k)$ atomare Formel, keine Gleichung. Bestimme die Menge der Tupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$ von variablenfreien Termen mit

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell) = R(t_1, \ldots, t_k)[x_1 := s_1] \cdots [x_\ell := s_\ell] \, ,$$

d.h., für die die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i \wedge \neg\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \equiv \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i \wedge (\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \bot)$$

Erinnerung

- Eine Horn-Formel der Prädikatenlogik ist eine Konjunktion von Horn-Klauseln der Prädikatenlogik.
- Eine Horn-Klausel der Aussagenlogik ist eine Formel der Form

$$(\neg\bot \wedge q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_m) \to r$$

mit $m \geq 0$, atomaren Formeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$, r atomare Formel od. $\bot$.

Beobachtung

- Wir müssen die Unerfüllbarkeit einer gleichungsfreien Horn-Formel der Prädikatenlogik testen.
- Ist φ gleichungsfreie Horn-Klausel der Prädikatenlogik, so ist $E(\varphi)$ eine Menge von Horn-Klauseln der Aussagenlogik.

Schreib- und Sprechweise

- $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \to \beta$ für Horn-Klausel der Prädikatenlogik
  $(\neg\bot \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta$
  insbes. $\emptyset \to \beta$ für $\neg\bot \to \beta$
- $\{(N_i \to \beta_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ für Horn-Formel $\bigwedge_{1 \leq i \leq m} (N_i \to \beta_i)$

Folgerung

Sei $\varphi = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i$ gleichungsfreie Horn-Formel der Prädikatenlogik. Dann ist φ genau dann unerfüllbar, wenn $\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ im aussagenlogischen Sinne unerfüllbar ist.

Beweis: Für $1 \leq i \leq n$ sei

$$\varphi_i = \forall x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{m_i}^i \, \psi_i \, .$$

Zur Vereinfachung nehme wir an, daß die Variablen x_j^i für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m_i$ paarweise verschieden sind.
Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' := \forall (x_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m_i}} \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \psi_i \, .$$

Wir erhalten

$$E(\varphi') = \{ \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \mid \alpha_i \in E(\varphi_i) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \}$$

Für $X \subseteq E(\varphi')$ definiere

$$H(X) = \{\alpha \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i) \mid \alpha \text{ kommt in einer Formel aus } X \text{ vor}\}$$

Damit gilt:

- φ unerfüllbar
  $\Longrightarrow$ φ' unerfüllbar
  $\Longrightarrow$ (Folie 13.9) es gibt $X \subseteq E(\varphi')$ endlich und unerfüllbar
  $\Longrightarrow$ $H(X) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ ist endlich und unerfüllbar
- $H \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ endlich und unerfüllbar
  $\Longrightarrow$ es gibt $X \subseteq E(\varphi')$ endlich mit $H \subseteq H(X)$
  $\Longrightarrow$ $H(X)$ endlich und unerfüllbar
  $\Longrightarrow$ X unerfüllbar
  $\Longrightarrow$ (Folie 13.9) φ' unerfüllbar
  $\Longrightarrow$ φ unerfüllbar. $\square$

Folgerung

Eine gleichungsfreie Horn-Formel der Prädikatenlogik $\varphi = \bigwedge_{1 \le i \le n} \varphi_i$ ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, \ldots, M_m \to \bot)$ aus $\bigcup_{1 \le i \le n} E(\varphi_i)$ mit $M_m = \emptyset$ gibt.

Beweis: φ unerfüllbar

$\Leftrightarrow$ (Folie 13.18) $\bigcup_{1 \le i \le n} E(\varphi_i)$ unerfüllbar

$\Leftrightarrow$ (Folie 6.18) es gibt SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, \ldots, M_m \to \bot)$ aus $\bigcup_{1 \le i \le n} E(\varphi_i)$ mit $M_m = \emptyset$ $\square$

Wir wollen die Menge der Tupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$ variablenfreier Terme bestimmen, für die

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i \wedge (\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \perp)$$

unerfüllbar ist (vgl. Folie 13.15).

Wegen $E(\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \perp) = \{\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \perp\}$ suchen wir also die Menge aller Tupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$, so daß es SLD-Resolution $(M_0 \to \perp, \ldots, M_m \to \perp)$ aus

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i) \cup \{\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \perp\}$$

mit $M_m = \emptyset$ gibt.

Wir versuchen, diejenige Tupel, für die diese SLD-Resolutionen „sehr ähnlich“ sind, zusammenzufassen, und zwar in einer „prädikatenlogischen SLD-Resolution“.