Aufgabe (vgl. Folie 13.15)

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gleichungsfreie Horn-Klauseln, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) = R(t_1, \ldots, t_k)$ atomare Formel, keine Gleichung. Bestimme die Menge der Tupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$ von variablenlosen Termen mit

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell)\,,$$

d.h., für die die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i \wedge (\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \bot)$$

Auf Folie 13.21 haben wir gesehen, daß dies genau dann der Fall ist, wenn es eine SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, \dots, M_m \to \bot)$ aus

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i) \cup E(\psi(s_1, \dots, s_\ell) \to \bot)$$

mit $M_m = \emptyset$ gibt.

Ziel

Zusammenfassung von möglichst vielen solchen SLD-Resolutionen für verschiedene Termtupel $(s_1, \dots, s_\ell)$ in einer prädikatenlogischen SLD-Resolution.

Prädikatenlogische SLD-Resolution

Erinnerung

- Eine Horn-Klausel der Prädikatenlogik ist eine Aussage der Form

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \, \forall x_n \, \underbrace{((\neg\bot \land \alpha_1 \land \alpha_2 \land \cdots \land \alpha_m) \to \beta)}_{=\psi},$$

  mit $m \geq 0$, atomaren Formeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und β atomare Formel oder $\bot$. Sie ist definit, wenn $\beta \neq \bot$.
- $E(\varphi) = \{\psi[x_1 := t_1][x_2 := t_2] \ldots [x_n := t_n] \mid t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(\Sigma)\}$
- Eine Horn-Klausel der Aussagenlogik ist eine Formel der Form

$$(\neg\bot \land q_1 \land q_2 \land \cdots \land q_m) \to r$$

  mit $m \geq 0$, atomaren Formeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$, r atomare Formel od. $\bot$.

Schreib- und Sprechweise

Für die Horn-Klausel der Prädikatenlogik

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n (\neg\bot \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \to \beta$$

schreiben wir kürzer

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \to \beta\,.$$

insbes. $\emptyset \to \beta$ für $\forall x_1 \cdots \forall x_n (\neg\bot \to \beta)$

Erinnerung

Sei Γ eine Menge von Horn-Klauseln der Aussagenlogik. Eine aussagenlogische SLD-Resolution aus Γ ist eine Folge $(M_0 \to \perp, M_1 \to \perp, \ldots, M_m \to \perp)$ von Hornklauseln mit

- $(M_0 \to \perp) \in \Gamma$ und
- für alle $0 \leq n < m$ existiert $(N \to q) \in \Gamma$ mit $q \in M_n$ und $M_{n+1} = M_n \setminus \{q\} \cup N$

Definition

Sei Γ eine Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik. Eine SLD-Resolution aus Γ ist eine Folge

$$((M_0 \to \bot, \sigma_0), (M_1 \to \bot, \sigma_1), \ldots, (M_m \to \bot, \sigma_m))$$

von Horn-Klauseln und Substitutionen mit

- $(M_0 \to \bot) \in \Gamma$ und $\mathrm{Def}(\sigma_0) = \emptyset$
- für alle $0 \leq n < m$ existieren $\emptyset \neq Q \subseteq M_n$, $(N \to \alpha) \in \Gamma$ und Variablenumbenennung ρ, so daß
  - $(N \cup \{\alpha\})\,\rho$ und M_n variablendisjunkt sind,
  - σ_{n+1} ein allgemeinster Unifikator von $\alpha\,\rho$ und Q ist und
  - $M_{n+1} = (M_n \setminus Q \cup N\,\rho)\,\sigma_{n+1}$.

Ziel (vgl. Aufgabe auf Folie 13.15 bzw. 15.1)

Seien $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ Menge gleichungsfreier Horn-Klauseln, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) = R(t_1, \ldots, t_k)$ atomare Formel, keine Gleichung und $(s_1, \ldots, s_\ell)$ Tupel variablenloser Terme.

Dann sind äquivalent:

(1) $\Gamma \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell)$.

(2) Es gibt eine SLD-Resolution $\big((M_n \to \bot, \sigma_n)\big)_{0 \le n \le m}$ aus $\Gamma \cup \{M_0 \to \bot\}$ mit $M_0 = \{\psi(x_1, \ldots, x_\ell)\}$ und $M_m = \emptyset$ und eine Substitution τ, so daß

$$s_i = x_i\, \sigma_0\, \sigma_1 \,\cdots\, \sigma_m\, \tau$$

für alle $1 \le i \le \ell$ gilt.

Lemma

Sei Γ Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik und $\big((M_n \to \bot, \sigma_n)\big)_{0 \leq n \leq m}$ eine SLD-Resolution aus $\Gamma \cup \{M_0 \to \bot\}$ mit $M_m = \emptyset$.
Dann gilt $\Gamma \models \psi\, \sigma_0\, \sigma_1\, \sigma_2 \cdots \sigma_m$ für alle $\psi \in M_0$.

Konsequenz

$\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $M_0 = \{\psi(x_1, \dots, x_\ell)\}$, τ Substitution, so daß $s_i = x_i\, \sigma_0\, \sigma_1\, \sigma_2 \cdots \sigma_m\, \tau$ variablenlos für alle $1 \leq i \leq \ell$. Nach dem Lemma gilt also

$$\Gamma \models \psi(x_1, \dots, x_\ell)\, \sigma_0 \cdots \sigma_m$$

und damit

$$\Gamma \models \psi(x_1, \dots, x_\ell)\, \sigma_0 \cdots \sigma_m\, \tau = \psi(s_1, \dots, s_\ell)\,.$$

Die Implikation (2)$\Rightarrow$(1) des Ziels auf Folie 15.7 folgt also aus diesem Lemma.

Beweis: Wir zeigen induktiv für alle $m \geq n \geq 0$:

$$\Gamma \models \psi\, \sigma_{n+1}\, \sigma_{n+2} \cdots \sigma_m \text{ für alle } \psi \in M_n\,.$$

(wegen $t\sigma_0 = t$ für alle Terme folgt dann die Behauptung mit $n = 0$.)

IA $n = m$: wegen $M_m = \emptyset$ ist Behauptung hierfür trivial.

IS Sei $n < m$ und $\psi \in M_n$.
Da $\big((M_i \to \bot, \sigma_i)\big)_{0 \leq i \leq m}$ prädikatenlogische SLD-Resolution aus $\Gamma \cup \{M_0 \to \bot\}$ ist, existieren $(N \to \alpha) \in \Gamma$, $\emptyset \neq Q \subseteq M_n$ und Variablenumbenennung ρ, so daß

- $(N \cup \{\alpha\})\,\rho$ und M_n variablendisjunkt sind,
- σ_{n+1} allgemeinster Unifikator von $\alpha\rho$ und Q ist und
- $M_{n+1} = (M_n \setminus Q \cup N\,\rho)\,\sigma_{n+1}$.

Aus $\psi \in M_n$ folgt $\psi \in Q$ oder $\psi\,\sigma_{n+1} \in M_{n+1}$. Wir zeigen

$$\Gamma \models \psi\, \sigma_{n+1} \cdots \sigma_m$$

für diese beiden Fälle getrennt.

2. Fall: $\psi\,\sigma_{n+1} \in M_{n+1}$. Nach IV gilt dann
$\Gamma \models (\psi\,\sigma_{n+1})\,\sigma_{n+2} \cdots \sigma_m$.

1. Fall: $\psi \in Q$.

Für alle $\delta \in N$ gilt $\delta\,\rho\,\sigma_{n+1} \in M_{n+1}$ nach Konstruktion von M_{n+1}, also nach IV $\Gamma \models (\delta\,\rho\,\sigma_{n+1})\,\sigma_{n+2} \cdots \sigma_m$.

Wegen $(N \to \alpha) \in \Gamma$ gilt $\Gamma \models N \to \alpha$
$\Longrightarrow \Gamma \models (N \to \alpha)\,\rho\,\sigma_{n+1} \cdots \sigma_m$.

Damit erhalten wir

$$\Gamma \models \alpha\,\rho\,\sigma_{n+1} \cdots \sigma_m = \psi\,\sigma_{n+1} \cdots \sigma_m\,,$$

wobei die Gleichheit der Formeln gilt, da σ_{n+1} Unifikator von $\alpha\,\rho$ und $\psi \in Q$ ist. $\square$

Lemma

Sei Γ eine Menge von definiten gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik, sei $M \to \bot$ eine gleichungsfreie Horn-Klausel und sei ν Substitution, so daß $M\,\nu$ variablenlos ist und $\Gamma \models M\,\nu$ gilt.
Dann existieren eine prädikatenlogische SLD-Resolution $\big((M_n \to \bot, \sigma_n)\big)_{0 \leq n \leq m}$ und eine Substitution τ mit $M_0 = M$, $M_m = \emptyset$ und $M_0\,\sigma_0\,\sigma_1\,\ldots\,\sigma_m\,\tau = M\,\nu$.

Konsequenz

$\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $M = \{\psi(x_1, \ldots, x_\ell)\}$, $s_1, \ldots, s_\ell$ variablenlose Terme, so daß

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell) = \psi(x_1, \ldots, x_\ell)\,\nu$$

mit $\nu(x_i) = s_i$. Dann existieren SLD-Resolution und Substitution τ mit

$$M_0\,\sigma_0\,\cdots\,\sigma_m\,\tau = M\,\nu = \{\psi(s_1, \ldots, s_\ell)\}\,.$$

Die Implikation (1)$\Rightarrow$(2) des Ziels auf Folie 15.7 folgt also aus diesem Lemma.

Beweis:

$\Gamma' = \Gamma \cup \{M\,\nu \to \bot\}$, $E(\Gamma') = \bigcup_{\varphi \in \Gamma'} E(\varphi) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} E(\varphi) \cup \{M\nu \to \bot\}$.

$\Gamma \models M\,\nu$

$\Longrightarrow$ Γ' unerfüllbar im prädikatenlogischen Sinne

$\Longrightarrow$ (Folie 13.18) $E(\Gamma')$ unerfüllbar im aussagenlogischen Sinne

$\Longrightarrow$ (Folie 6.18) es gibt aussagenlogische SLD-Resolution
$\big((M'_n \to \bot)\big)_{0 \leq n \leq m}$ aus $E(\Gamma')$ mit $M'_m = \emptyset$.

Behauptung: Es gibt eine prädikatenlogische SLD-Resolution $\big((M_n \to \bot, \sigma_n)\big)_{0 \leq n \leq m}$ und Substitutionen τ_n mit

- $M_0 = M$,
- $M'_n = M_n\,\tau_n$ und
- $M\,\nu = M_0\,\sigma_0\,\sigma_1 \ldots \sigma_n\,\tau_n$

für alle $0 \leq n \leq m$.

Mit $m = n$ und $\tau = \tau_m$ folgt hieraus die verbleibende Behauptung des Lemmas: Wegen $\emptyset = M'_m = M_m\,\tau_m$ gilt $M_m = \emptyset$.

I.A. $n = 0$:
$\big((M'_n \to \bot)\big)_{0 \leq i \leq m}$ aussagenlogische SLD-Resolution aus $E(\Gamma')$
$\Longrightarrow (M'_0 \to \bot) \in E(\Gamma')$
$\Longrightarrow M'_0 = M\,\nu$, da $M\,\nu \to \bot$ einzige nicht-definite Horn-Klausel in $E(\Gamma')$ ist.

Setze $M_0 := M$, $\mathrm{Def}(sigma_0) := \emptyset$ und $\tau_0 := \nu$

Dann gilt die Behautung für $n = 0$.

I.V. Sei $0 \leq n < m$ und gelte die Behauptung für dieses n.

I.S.

$\big((M'_i \to \bot)\big)_{0\leq i\leq m}$ aussagenlogische SLD-Resolution aus $E(\Gamma')$

$\Longrightarrow$ es gibt $q \in M'_n$ und $(N' \to q) \in E(\Gamma')$ mit $M'_{n+1} = M'_n \setminus \{q\} \cup N'$

$(N' \to q) \in E(\Gamma')$

$\Longrightarrow$ es gibt $(N \to \alpha) \in \Gamma$, Variablenumbenennung ρ und Substitution σ mit

- $N' = N\,\rho\,\sigma$
- $q = \alpha\,\rho\,\sigma$ und
- $(N \cup \{\alpha\})\,\rho$ und $M_n \cup M_0\,\sigma_0\,\sigma_1\,\ldots\,\sigma_n$ sind variablendisjunkt

Definiere Substitution τ_n^+ durch

$$\tau_n^+(x) = \begin{cases} \tau_n(x) & \text{falls } x \text{ Variable in } M_n \cup M_0\,\sigma_0\,\ldots\,\sigma_n \\ \sigma(x) & \text{falls } x \text{ Variable in } (N \cup \{\alpha\})\,\rho \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei Q die Menge der Formeln $\beta \in M_n$ mit $\alpha\,\rho\,\tau_n^+ = \beta\,\tau_n^+$.

Wegen $\alpha\,\rho\,\tau_n^+ = \alpha\,\rho\,\sigma = q \in M_n' = M_n\,\tau_n = M_n\,\tau_n^+$ gilt $\emptyset \neq Q \subseteq M_n$.

Da τ_n^+ ein Unifikator von $\alpha\,\rho$ und Q ist, existiert ein allgemeinster Unifikator σ_{n+1} von $\alpha\,\rho$ und Q. Dann existiert eine Substitution τ_{n+1} mit $\tau_n^+ = \sigma_{n+1}\,\tau_{n+1}$.

Setze $M_{n+1} = (M_n \setminus Q \cup N\,\rho)\,\sigma_{n+1}$.

Wir zeigen jetzt $M_{n+1}\,\tau_{n+1} = M_{n+1}'$ und $M\,\nu = M_0\,\sigma_0\,\sigma_1\,\ldots\,\sigma_{n+1}\tau_{n+1}$.

$$
\begin{aligned}
M_{n+1}\,\tau_{n+1} &= \big(M_n \setminus Q \cup N\,\rho\big)\,\sigma_{n+1}\,\tau_{n+1} \\
&= \big(M_n \setminus Q \cup N\,\rho\big)\,\tau_n^+ \\
&= \big(M_n \setminus Q\big)\,\tau_n^+ \cup N\,\rho\,\tau_n^+ \\
&= \big(M_n\,\tau_n^+ \setminus Q\,\tau_n^+\big) \cup N\,\rho\,\tau_n^+ \text{ (aufgrund der Wahl von } Q\text{)} \\
&= \big(M_n\,\tau_n^+ \setminus \{\alpha\,\rho\,\tau_n^+\}\big) \cup N\,\rho\,\tau_n^+ \text{ (da } \tau_n^+ \text{ Unifikator)} \\
&= \big(M_n\,\tau_n \setminus \{\alpha\,\rho\,\sigma\}\big) \cup N\,\rho\,\sigma \text{ (nach der Definition von } \tau_n^+\text{)} \\
&= \big(M'_n \setminus \{q\}\big) \cup N' \text{ (nach IV)} \\
&= M'_{n+1}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
M\,\nu &= M_0\,\sigma_0\,\ldots\,\sigma_n\,\tau_n \\
&= M_0\,\sigma_0\,\ldots\,\sigma_n\,\tau_n^+ \text{ (nach der Definition von } \tau_n^+\text{)} \\
&= M_0\,\sigma_0\,\ldots\,\sigma_n\,\sigma_{n+1}\,\tau_{n+1}
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist, mit den so gefundenen Mengen M_n und Substitutionen σ_n,

$$\big((M_n \to \bot, \sigma_n)\big)_{0 \leq n \leq m}$$

eine SLD-Resolution aus Γ. Damit ist die Behauptung von Folien 15.12 gezeigt, aus der ja das Lemma folgt. □

Satz

Sei Γ eine Menge von definiten gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik, sei $M \to \perp$ eine gleichungsfreie Horn-Klausel und sei ν Substitution, so daß $M\,\nu$ variablenlos ist. Dann sind äquivalent:

- $\Gamma \models M\,\nu$
- Es existieren eine SLD-Resolution $\big((M_n \to \perp, \sigma_n)\big)_{0 \leq n \leq m}$ aus $\Gamma \cup \{M\,\nu \to \perp\}$ und eine Substitution τ mit $M_0 = M$, $M_m = \emptyset$ und $M_0\,\sigma_0\,\sigma_1\,\ldots\,\sigma_m\,\tau = M\,\nu$.

Konsequenz

$\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $M_0 = \{\psi(x_1, \ldots, x_\ell)\} = \{R(t_1, t_2, \ldots, t_k)\}$.

Durch SLD-Resolutionen können genau die Tupel variablenloser Terme gewonnen werden, für die gilt:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell)$$

Zusammenfassung Prädikatenlogik

- Das natürliche Schließen formalisiert die „üblichen“ Argumente in mathematischen Beweisen.
- Das natürliche Schließen ist vollständig und korrekt.
- Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.
- Die Menge der Aussagen, die in $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ gelten, ist nicht semi-entscheidbar.
- Die SLD-Resolution ist ein praktikables Verfahren, um die Menge der „Lösungen“ $(s_1, \dots, s_\ell)$ von $\Gamma \models \psi(s_1, \dots, s_\ell)$ zu bestimmen (wobei Γ Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln und ψ Konjunktion von gleichungsfreien Atomformeln sind.