Erfüllbare Mengen

Definition

Sei Γ eine Menge von Formeln.
Γ heißt erfüllbar, wenn es eine passende B-Belegung $\mathcal{B}$ gibt mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1_B$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

Bemerkung

- Die Erfüllbarkeit einer endlichen Menge Γ ist entscheidbar:
  - Berechne Menge V von in Γ vorkommenden atomaren Formeln
  - Probiere alle B-Belegungen $\mathcal{B}\colon V \to B$ durch
- Die Erfüllbarkeit einer endlichen Menge Γ ist NP-vollständig (Satz von Cook, vgl. "Automaten, Sprachen und Komplexität", 27. Vorlesung)

Satz

Sei Δ eine maximal konsistente Menge von Formeln. Dann ist Δ erfüllbar.

Beweis:

Definiere eine B-Belegung $\mathcal{B}$ mittels

$$\mathcal{B}(p_i) = \begin{cases} 1_B & \text{falls } p_i \in \Delta \\ 0_B & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen für alle Formeln φ:

$$\mathcal{B}(\varphi) = 1_B \iff \varphi \in \Delta \tag{*}$$

Der Beweis erfolgt per Induktion über die Länge von φ.

IA hat φ die Länge 1, so ist φ atomare Formel. Hier gilt (*) nach Konstruktion von $\mathcal{B}$.

IV Gelte (*) für alle Formeln der Länge $< n$.

IS Sei φ Formel der Länge $n > 1$.

$\Longrightarrow$ Es gibt Formeln α und β der Länge $< n$ mit $\varphi \in \{\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \to \beta\}$.

Wir zeigen (*) für diese vier Fälle einzeln auf den folgenden Folien.

Zur Erinnerung (letzte Vorlesung): Δ max. konsistent, φ Formel

- Lemma 1: $\Delta \vdash \varphi \implies \varphi \in \Delta$
- Lemma 2: $\varphi \notin \Delta \iff \neg\varphi \in \Delta$

1. $\varphi = \neg\alpha$.

$$\mathcal{B}(\varphi) = 1_B \iff \mathcal{B}(\alpha) = 0_B \overset{\text{IV}}{\iff} \alpha \notin \Delta \overset{\text{Lemma 2}}{\iff} \Delta \ni \neg\alpha = \varphi$$

2. $\varphi = \alpha \wedge \beta$.
   - $\mathcal{B}(\varphi) = 1_B \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta) = 1_B \overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \alpha, \beta \in \Delta$

     $\Longrightarrow \Delta \vdash \varphi$ denn $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\,(\wedge\mathrm{I})$ ist Deduktion $\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} \varphi \in \Delta$.
   - $\varphi \in \Delta$

     $\Longrightarrow \Delta \vdash \alpha$ und $\Delta \vdash \beta$ denn $\dfrac{\varphi}{\alpha}\,(\wedge\mathrm{E}_1)$ und $\dfrac{\varphi}{\beta}\,(\wedge\mathrm{E}_2)$ sind Deduktionen.

     $\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} \alpha, \beta \in \Delta \overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta) = 1_B \Longrightarrow \mathcal{B}(\varphi) = 1_B$

3. $\varphi = \alpha \vee \beta$.
   - $\mathcal{B}(\varphi) = 1_B \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = 1_B$ oder $\mathcal{B}(\beta) = 1_B$
     - angenommen, $\mathcal{B}(\alpha) = 1_B \overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \alpha \in \Delta$

       $\Longrightarrow \Delta \vdash \varphi$ denn $\dfrac{\alpha}{\varphi}\,(\vee\mathrm{I}_1)$ ist Deduktion $\xRightarrow{\text{Lemma 1}} \varphi \in \Delta$
     - angenommen, $\mathcal{B}(\alpha) = 0_B \Rightarrow \mathcal{B}(\beta) = 1_B$. weiter analog.
   - $\varphi \in \Delta$. Dann gilt $\Delta \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\} \vdash \perp$ aufgrund der Deduktion

$$\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{\neg\alpha \quad [\alpha]^6}{\perp}\,(\neg\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\neg\beta \quad [\beta]^6}{\perp}\,(\neg\mathrm{E})}{\perp}\,(\vee\mathrm{E})^6$$

Da Δ konsistent ist, folgt $\Delta \neq \Delta \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\}$ und damit $\neg\alpha \notin \Delta$ oder $\neg\beta \notin \Delta$.

$\Longrightarrow \alpha \in \Delta$ oder $\beta \in \Delta$ nach Lemma 2

$\overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \mathcal{B}(\alpha) = 1_B$ oder $\mathcal{B}(\beta) = 1_B$

$\Longrightarrow \mathcal{B}(\varphi) = 1_B$.

4. $\varphi = \alpha \to \beta$.
   - $\mathcal{B}(\varphi) = 1_B \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = 0_B$ oder $\mathcal{B}(\beta) = 1_B$

     $\stackrel{\text{IV}}{\Longrightarrow} \neg\alpha \in \Delta$ oder $\beta \in \Delta$

Aufgrund nebenstehender Deduktionen gilt in beiden Fällen $\Delta \vdash \alpha \to \beta$.

$\xRightarrow{\text{Lemma 1}} \varphi \in \Delta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \quad [\alpha]^4}{\bot}}{\beta}\,(\bot)}{\alpha \to \beta}\,(\to\text{I})^4 \qquad \dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\,(\to\text{I})$$

   - $\varphi \in \Delta$.
     Angenommen, $\mathcal{B}(\varphi) = 0_B \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = 1_B, \mathcal{B}(\beta) = 0_B$

     $\stackrel{\text{IV}}{\Longrightarrow} \alpha \in \Delta, \beta \notin \Delta \xRightarrow{\text{Lemma 2}} \neg\beta \in \Delta$

Aufgrund der nebenstehenden Deduktion gilt $\Delta \vdash \bot$, d.h. Δ ist inkonsistent, im Widerspruch zur Annahme.

$\Longrightarrow \mathcal{B}(\varphi) = 1_B$

$$\dfrac{\neg\beta \qquad \dfrac{\alpha \quad \varphi}{\beta}\,(\to\text{E})}{\bot}\,(\neg\text{E})$$

□

Lemma

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \not\models_B \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar.}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Gamma \not\models_B \varphi \iff & \text{ es gibt passende } B\text{-Belegung } \mathcal{B} \text{ mit} \\
& \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \not\leq_B \mathcal{B}(\varphi) \\
\iff & \text{ es gibt passende } B\text{-Belegung } \mathcal{B} \text{ mit} \\
& \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 1_B \text{ und } \mathcal{B}(\varphi) = 0_B \\
\iff & \text{ es gibt passende } B\text{-Belegung } \mathcal{B} \text{ mit} \\
& \mathcal{B}(\gamma) = 1_B \text{ für alle } \gamma \in \Gamma \text{ und } \mathcal{B}(\neg\varphi) = 1_B \\
\iff & \; \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar}
\end{aligned}$$

$\square$

Beobachtung

Sei W einer der Wahrheitswertebereiche B, K_3, F, $H_{\mathbb{R}}$ und $B_{\mathbb{R}}$, Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \models_W \varphi \implies \Gamma \models_B \varphi\,.$$

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ beliebige B-Belegung, die zu jeder Formel in $\Gamma \cup \{\varphi\}$ paßt.

definiere W-Belegung $\mathcal{B}_W$ durch $\mathcal{B}_W(p_i) = \begin{cases} 1_W & \text{falls } \mathcal{B}(p_i) = 1_B \\ 0_W & \text{sonst.} \end{cases}$

per Induktion über die Formelgröße kann man für alle Formeln ψ, zu denen $\mathcal{B}$ paßt, zeigen (Selbststudium!):

$$\mathcal{B}_W(\psi) = \begin{cases} 1_W & \text{falls } \mathcal{B}(\psi) = 1_B \\ 0_W & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (*)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

$$\begin{aligned}
\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 1_B \quad &\Rightarrow \quad \inf\{\mathcal{B}_W(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 1_W \text{ (wegen (*))} \\
&\Rightarrow \quad 1_W = \mathcal{B}_W(\varphi) \text{ (wegen } \Gamma \models_W \varphi\text{)} \\
&\Rightarrow \quad 1_B = \mathcal{B}(\varphi) \text{ (wegen (*))} \\
&\Rightarrow \quad \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 1_B \leq \mathcal{B}(\varphi)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \neq 1_B \quad &\Rightarrow \quad \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 0_B \\
&\Rightarrow \quad \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 0_B \leq \mathcal{B}(\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}$ beliebig war, gilt $\Gamma \models_B \varphi$. $\square$

Satz (Vollständigkeitssatz)

Sei Γ eine Menge von Formeln, φ eine Formel und W einer der Wahrheitswertebereiche B, K_3, F, $B_\mathbb{R}$ und $H_\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\Gamma \models_W \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi\,.$$

Insbesondere ist jede W-Tautologie ein Theorem.

Beweis: indirekt

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Gamma \not\models_W \varphi \\
 & & \Uparrow \text{(Folie 5.8)} \\
\Gamma \nvdash \varphi & & \Gamma \not\models_B \varphi \\
\Downarrow \text{(Folie 4.17)} & & \Uparrow \text{(Folie 5.7)} \\
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent} & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(Folie 4.20)} & & \Uparrow \text{(klar)} \\
\exists \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ maximal konsistent} & \underset{\text{(Folie 5.2)}}{\Longrightarrow} & \Delta \text{ erfüllbar}
\end{array}$$

Vollständigkeit und Korrektheit

Satz

Seien Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models_B \varphi\,.$$

Insbesondere ist eine Formel genau dann eine B-Tautologie, wenn sie ein Theorem ist.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Korrektheitssatz auf Folie 4.9 und Vollständigkeitssatz auf Folie 5.10. □

Bemerkung

- gilt für jede „Boolesche Algebra", z.B. $B_{\mathbb{R}}$
- $\Gamma \vdash \varphi$ ohne (raa) $\iff \Gamma \models_{H_{\mathbb{R}}} \varphi$ (Tarksi 1938)

Folgerung 1: Entscheidbarkeit

Satz

Die Menge der Theoreme ist entscheidbar.

Beweis: Sei φ Formel und V die Menge der vorkommenden atomaren Formeln. Dann gilt

φ Theorem

$\iff$ φ B-Tautologie

$\iff$ für alle Abbildungen $\mathcal{B}\colon V \to \{0_B, 1_B\}$ gilt $\mathcal{B}(\varphi) = 1_B$

Da es nur endlich viele solche Abbildungen gibt und $\mathcal{B}(\varphi)$ berechnet werden kann, ist dies eine entscheidbare Aussage. $\square$

Folgerung 2: Äquivalenzen und Theoreme

Definition

Zwei Formeln α und β heißen äquivalent ($\alpha \equiv \beta$), wenn für alle passenden B-Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta)\,.$$

Satz

Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

1. $p_1 \vee p_2 \equiv p_2 \vee p_1$
2. $(p_1 \vee p_2) \vee p_3 \equiv p_1 \vee (p_2 \vee p_3)$
3. $p_1 \vee (p_2 \wedge p_3) \equiv (p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$
4. $\neg(p_1 \vee p_2) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2$
5. $p_1 \vee p_1 \equiv p_1$
6. $(p_1 \wedge \neg p_1) \vee p_2 \equiv p_2$
7. $\neg\neg p_1 \equiv p_1$
8. $p_1 \wedge \neg p_1 \equiv \bot$
9. $p_1 \vee \neg p_1 \equiv \neg\bot$
10. $p_1 \to p_2 \equiv \neg p_1 \vee p_2$

Beweis: Wir zeigen nur die Äquivalenz (3): Sei $\mathcal{B}$ beliebige B-Belegung, die wenigstens auf $\{p_1, p_2, p_3\}$ definiert ist.

Dazu betrachten wir die Wertetabelle:

$\mathcal{B}(p_1)$	$\mathcal{B}(p_2)$	$\mathcal{B}(p_3)$	$\mathcal{B}(p_1 \vee (p_2 \wedge p_3))$	$\mathcal{B}((p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3))$
0_B	0_B	0_B	0_B	0_B
0_B	0_B	1_B	0_B	0_B
0_B	1_B	0_B	0_B	0_B
0_B	1_B	1_B	1_B	1_B
1_B	0_B	0_B	1_B	1_B
1_B	0_B	1_B	1_B	1_B
1_B	1_B	0_B	1_B	1_B
1_B	1_B	1_B	1_B	1_B

Die anderen Äquivalenzen werden analog bewiesen. $\square$

Aus dieser Liste von Äquivalenzen können weitere hergeleitet werden:

Beispiel

Für alle Formeln α und β gilt $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Beweis:

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \overset{(7)}{\equiv} \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta) \overset{(4)}{\equiv} \neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \overset{(7)}{\equiv} \neg\alpha \vee \neg\beta$$

□

Bemerkung

Mit den üblichen Rechenregeln für Gleichungen können aus dieser Liste alle gültigen Äquivalenzen hergeleitet werden.

Zusammenhang zw. Theoremen und Äquivalenzen

Satz

Seien α und β zwei Formeln. Dann gilt

$$\alpha \equiv \beta \iff (\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ ist Theorem}\,.$$

Beweis:

$\alpha \equiv \beta$

$\iff$ für alle passenden B-Belegungen $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta)$

$\iff$ $\{\alpha\} \models_B \beta$ und $\{\beta\} \models_B \alpha$

$\iff$ $\{\alpha\} \vdash \beta$ und $\{\beta\} \vdash \alpha$ (nach Korrektheits- und Vollständigkeitssatz)

es bleibt z.z., daß dies äquivalent zu $\emptyset \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$ ist.

„$\Rightarrow$“: Wir haben also Deduktionen mit Hypothesen in $\{\alpha\}$ bzw. in $\{\beta\}$ und Konklusionen β bzw. α. Es ergibt sich eine hypothesenlose Deduktion von $\alpha \leftrightarrow \beta$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]^8\\ \bigtriangledown \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\,(\to\mathsf{I})^8 \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\beta]^9\\ \bigtriangledown \\ \alpha\end{matrix}}{\beta \to \alpha}\,(\to\mathsf{I})^9}{(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)}\,(\wedge\mathsf{I})$$

„$\Leftarrow$“: Wir haben also eine hypothesenlose Deduktion von $\alpha \leftrightarrow \beta$. Es ergeben sich die folgenden Deduktionen mit Hypothesen β bzw. α und Konklusionen α bzw. β:

$$\dfrac{\alpha \qquad \dfrac{\overset{\nabla}{\alpha \to \beta \wedge \beta \to \alpha}}{\alpha \to \beta}(\wedge\mathsf{E}_1)}{\beta}(\to\mathsf{E}) \qquad\qquad \dfrac{\beta \qquad \dfrac{\overset{\nabla}{\alpha \to \beta \wedge \beta \to \alpha}}{\beta \to \alpha}(\wedge\mathsf{E}_2)}{\alpha}(\to\mathsf{E})$$

$\square$

Satz

Sei α eine Formel. Dann gilt

$$\alpha \text{ ist Theorem} \iff \alpha \equiv \neg\bot\,.$$

Beweis:

α ist Theorem

$\iff$ α ist B-Tautologie (Korrektheits- und Vollständigkeitssatz)

$\iff$ für alle passenden B-Belegungen $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(\alpha) = 1_B$

$\iff$ für alle passenden B-Belegungen $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\neg\bot)$

$\iff$ $\alpha \equiv \neg\bot$ $\square$

Folgerung 3: Kompaktheit

Satz

Seien Γ eine u.U. unendliche Menge von Formeln und φ eine Formel mit $\Gamma \models_B \varphi$. Dann existiert $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich mit $\Gamma' \models_B \varphi$.

Beweis:

$\Gamma \models_B \varphi$

$\Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ (nach dem Vollständigkeitssatz von Folie 5.10)

$\Longrightarrow$ es gibt Deduktion von φ mit Hypothesen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$

$\Longrightarrow \Gamma' = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ endlich mit $\Gamma' \vdash \varphi$

$\Longrightarrow \Gamma' \models_B \varphi$ (nach dem Korrektheitssatz von Folie 4.9). $\square$

Folgerung (Kompaktheits- oder Endlichkeitssatz)

Sei Γ eine u.U. unendliche Menge von Formeln. Dann gilt

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \exists\, \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ endlich: } \Gamma' \text{ unerfüllbar}$$

Beweis:

Γ unerfüllbar

$\iff$ $\Gamma \cup \{\neg\bot\}$ unerfüllbar

$\iff$ $\Gamma \models_B \bot$ (Folie 5.7)

$\iff$ es gibt $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich: $\Gamma' \models_B \bot$

$\iff$ es gibt $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich: $\Gamma' \cup \{\neg\bot\}$ unerfüllbar (Folie 5.7)

$\iff$ es gibt $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich: Γ' unerfüllbar $\square$

1. Anwendung des Kompaktheitsatzes: Färbbarkeit

Definition

Ein Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit einer Menge V und $E \subseteq \binom{V}{2} = \{X \subseteq V : |X| = 2\}$.

Für $W \subseteq V$ sei $G{\restriction_W} = (W, E \cap \binom{W}{2})$ der von W induzierte Teilgraph.

Der Graph G ist 3-färbbar, wenn es eine Abbildung $f : V \to \{1, 2, 3\}$ mit $f(v) \neq f(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$.

Bemerkung: Die 3-Färbbarkeit eines endlichen Graphen ist NP-vollständig (vgl. „Automaten, Sprachen und Komplexität", Vorlesung 28)

Satz

Sei $G = (\mathbb{N}, E)$ ein Graph. Dann sind äquivalent

(1) G ist 3-färbbar.

(2) Für jede endliche Menge $W \subseteq \mathbb{N}$ ist $G{\restriction}_W$ 3-färbbar.

Beweis:

„(1)⇒(2)“ trivial

„(2)⇒(1)“ Sei nun, für alle endlichen Menge $W \subseteq \mathbb{N}$, der induzierte Teilgraph $G{\restriction}_W$ 3-färbbar.

Wir beschreiben zunächst mit einer unendlichen Menge Γ von Formeln, daß eine 3-Färbung existiert:

atomare Formeln $p_{n,c}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \{1, 2, 3\}$
(Idee: der Knoten n hat die Farbe c)

Γ enthält die folgenden Formeln:

- für alle $n \in \mathbb{N}$: $p_{n,1} \vee p_{n,2} \vee p_{n,3}$
  (der Knoten n ist gefärbt)
- für alle $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\bigwedge_{1 \leq c < d \leq 3} \neg(p_{n,c} \wedge p_{n,d})$
  (der Knoten n ist nur mit einer Farbe gefärbt)
- für alle $\{m, n\} \in E$: $\displaystyle\bigwedge_{1 \leq c \leq 3} \neg(p_{m,c} \wedge p_{n,c})$
  (verbundene Knoten m und n sind verschieden gefärbt)

Behauptung: Jede endliche Menge $\Delta \subseteq \Gamma$ ist erfüllbar.

Begründung:
Da Δ endlich ist, existiert endliche Menge $W \subseteq \mathbb{N}$, so daß jede atomare Formel in Δ die Form $p_{n,c}$ für ein $n \in W$ und ein $c \in \{1, 2, 3\}$ hat.

Nach Annahme existiert $f_W \colon W \to \{1, 2, 3\}$ mit $f_W(m) \neq f(n)$ f.a. $\{m, n\} \in E \cap \binom{W}{2}$.

Definiere $\mathcal{B} \colon \{p_{n,c} \mid n \in W, 1 \leq c \leq 3\} \to \{0, 1\}$ durch

$$\mathcal{B}(p_{n,c}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_W(n) = c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Belegung erfüllt Δ, d.h. Δ ist erfüllbar, womit die Beh. gezeigt ist.

Nach dem Kompaktheitssatz ist also Γ erfüllbar.

Sei $\mathcal{B}$ erfüllende Belegung.

Für $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $c \in \{1, 2, 3\}$ mit $\mathcal{B}(p_{n,c}) = 1$. Setze $f(n) = c$.

Dann ist f eine gültige Färbung des Graphen G. $\square$

2. Anwendung des Kompaktheitsatzes: Parkettierungen

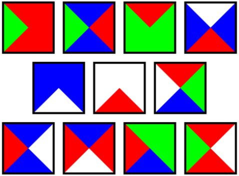
Idee

Gegeben ist eine Menge von quadratischen Kacheln mit gefärbten Kanten.

Ist es möglich, mit diesen Kacheln die gesamte Ebene zu füllen, so daß aneinanderstoßende Kanten gleichfarbig sind?

Berühmtes Beispiel

Mit diesen 11 Kacheln kann die Ebene gefüllt werden, aber dies ist nicht periodisch möglich.



Definition

Ein Kachelsystem besteht aus einer endlichen Menge C von „Farben“ und einer Menge $\mathcal{K}$ von Abbildungen $\{\mathtt{N}, \mathtt{O}, \mathtt{S}, \mathtt{W}\} \to C$ von „Kacheln“.

Eine Kachelung von $G \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist eine Abbildung $f\colon G \to \mathcal{K}$ mit

- $f(i,j)(\mathtt{N}) = f(i,j+1)(\mathtt{S})$ für alle $(i,j), (i,j+1) \in G$
- $f(i,j)(\mathtt{O}) = f(i+1,j)(\mathtt{W})$ für alle $(i,j), (i+1,j) \in G$

Satz

Sei $\mathcal{K}$ ein Kachelsystem. Es existiert genau dann eine Kachelung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Kachelung von $\{(i,j) : |i|, |j| \leq n\}$ existiert.

Beweis: „$\Rightarrow$“ trivial

„$\Leftarrow$" Wir beschreiben zunächst mit einer unendlichen Menge Γ von Formeln, daß eine Kachelung existiert:

atomare Formeln $p_{k,i,j}$ für $k \in \mathcal{K}$ und $i, j \in \mathbb{Z}$
(Idee: an der Stelle (i, j) liegt die Kachel k, d.h. $f(i, j) = k$)

Für alle $(i, j) \in \mathbb{Z}$ enthält Γ die folgenden Formeln:

- eine der Kacheln aus $\mathcal{K}$ liegt an der Stelle (i, j): $\bigvee_{k \in \mathcal{K}} p_{k,i,j}$
- es liegen nicht zwei verschiedene Kacheln an der Stelle (i, j):
$$\bigwedge_{k,k' \in \mathcal{K}, k \neq k'} \neg(p_{k,i,j} \wedge p_{k',i,j})$$
- Kacheln an Stellen (i, j) und $(i, j + 1)$ „passen übereinander":
$$\bigvee_{k,k' \in \mathcal{K}, k(\mathtt{N}) = k'(\mathtt{S})} (p_{k,i,j} \wedge p_{k',i,j+1})$$
- Kacheln an Stellen (i, j) und $(i + 1, j)$ „passen nebeneinander":
$$\bigvee (p_{k,i,j} \wedge p_{k',i+1,j})$$

Sei nun $\Delta \subseteq \Gamma$ endlich.

$\Longrightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$, so daß Δ nur atomare Formeln der Form $p_{k,i,j}$ mit $|i|, |j| \leq n$ enthält.

$\xRightarrow{\text{Voraussetzung}}$ es gibt Kachelung $g\colon \{(i,j) : |i|, |j| \leq n\} \to \mathcal{K}$

für $k \in \mathcal{K}$ und $|i|, |j| \leq n$ definiere

$$\mathcal{B}(p_{k,i,j}) = \begin{cases} 1_B & \text{falls } g(i,j) = k \\ 0_B & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mathcal{B}(\delta) = 1_B$ für alle $\delta \in \Delta$ (da g Kachelung)

Also haben wir gezeigt, daß jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.

$\xRightarrow{\text{Kompaktheitssatz}}$ es gibt B-Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1_B$ für alle $\gamma \in \Gamma$

$\Longrightarrow$ es gibt Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{K}$ mit $f(i,j) = k \iff \mathcal{B}(p_{k,i,j}) = 1_B$.

Wegen $\mathcal{B}(\gamma) = 1_B$ für alle $\gamma \in \Gamma$ ist dies eine Kachelung. $\square$

Weitere Anwendungen des Kompaktheitsatzes

- abz. partielle Ordnungen sind linearisierbar
- abz. Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_2$ lösbar
  $\iff$ jedes endliche Teilsystem lösbar
- Heiratsproblem
- Kőnigs Lemma (Übung)
- ...

Bemerkung: Der Kompaktheitssatz gilt auch, wenn die Menge der atomaren Formeln nicht abzählbar ist. Damit gelten die obigen Aussagen allgemeiner:

- 3-Färbbarkeit: beliebige Graphen
- Linearisierbarkeit: beliebige partielle Ordnungen
- Lösbarkeit: beliebig große Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_2$
- ...