Erfüllbarkeit

Erfüllbarkeitsproblem

Eingabe: Formel γ
Frage: existiert eine B-Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1_B$.

offensichtlicher Algorithmus: probiere alle Belegungen durch (d.h. stelle Wahrheitswertetabelle auf) $\rightarrow$ exponentielle Zeit

„Automaten, Sprachen und Komplexität“: das Problem ist NP-vollständig

nächstes Ziel: spezielle Algorithmen für syntaktisch eingeschränkte Formeln γ

Spätere Verallgemeinerung dieser Algorithmen (letzte Vorlesung des Logik-Teils von „Logik und Logikprogrammierung“) bildet Grundlage der logischen Programmierung.

Hornformeln (Alfred Horn, 1918–2001)

Definition

- Eine Hornklausel hat die Form

$$(\neg\bot \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$$

  für $n \geq 0$, atomare Formeln $p_1, p_2, \ldots, p_n$ und q atomare Formel oder $q = \bot$.
- Eine Hornformel ist eine Konjunktion von Hornklauseln.

Schreib- und Sprechweise

- $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \to q$ für Hornklausel $(\neg\bot \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$
  insbes. $\emptyset \to q$ für $\neg\bot \to q$
- $\{(M_i \to q_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ für Hornformel $\bigwedge_{1\leq i\leq n} (M_i \to q_i)$

Bemerkung

In der Literatur auch:

- $\{\neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_n, q\}$ für $\{p_1, \ldots, p_n\} \to q$ mit q atomare Formel
- $\{\neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_n\}$ für $\{p_1, \ldots, p_n\} \to \bot$
- $\square$ für $\emptyset \to \bot$, die „leere Hornklausel“

Markierungsalgorithmus

Eingabe: eine endliche Menge Γ von Hornklauseln.

(1) `while` es gibt in Γ eine Hornklausel $M \to q$, so daß alle $p \in M$ markiert sind und q unmarkierte atomare Formel ist

`do` markiere q (in allen Hornklauseln in Γ)

(2) `if` Γ enthält eine Hornklausel der Form $M \to \perp$, in der alle $p \in M$ markiert sind

`then return` „unerfüllbar“

`else return` „erfüllbar“

Beweis einer Folgerung: Beispiel (vgl. Folie 1.24)

Ziel ist es, die folgende Folgerung zu zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL\} \models_B \neg AK$$

Lemma auf Folie 5.7: man muß Unerfüllbarkeit der folgenden Menge zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL, \neg\neg AK\}$$

Dies ist keine Menge von Hornklauseln ☹!

Idee: ersetze BK durch $\neg BH$ in allen Formeln.

Ergebnis:

- Aus $AK \vee BK$ wird $\neg BH \vee AK \equiv BH \rightarrow AK \equiv \{BH\} \rightarrow AK$.
- Aus $AK \rightarrow BK$ wird $AK \rightarrow \neg BH \equiv \neg AK \vee \neg BH \equiv AK \wedge BH \rightarrow \bot \equiv \{AK, BH\} \rightarrow \bot$.
- Aus $BK \wedge RL \rightarrow \neg AK$ wird $\neg BH \wedge RL \rightarrow \neg AK \equiv BH \vee \neg RL \vee \neg AK \equiv RL \wedge AK \rightarrow BH \equiv \{RL, AK\} \rightarrow BH$
- $RL \equiv (\emptyset \rightarrow RL)$
- $\neg\neg AK \equiv (\emptyset \rightarrow AK)$

Wir müssen also zeigen, daß die folgende Menge von Hornklauseln unerfüllbar ist:

$$\{\{BH\} \rightarrow AK, \{AK, BH\} \rightarrow \bot, \{RL, AK\} \rightarrow BH, \emptyset \rightarrow RL, \emptyset \rightarrow AK\}$$

Der Markierungsalgorithmus geht wie folgt vor:

- 1. Runde: markiere RL aufgrund der Hornklausel $\emptyset \to RL$
- 2. Runde: markiere AK aufgrund der Hornklausel $\emptyset \to AK$
- 3. Runde: markiere BH aufgrund der Hornklausel $\{RL, AK\} \to BH$

dann sind keine weiteren Markierungen möglich.

In der Hornklausel $\{AK, BH\} \to \bot$ sind alle atomaren Formeln aus $\{AK, BH\}$ markiert. Also gibt der Algorithmus aus, daß die Menge von Hornklauseln nicht erfüllbar ist.

Nach unserer Herleitung folgern wir, daß das Teil A heil ist (in Übereinstimmung mit unseren Überlegungen auf Folien 1.24 bzw. 3.18).

(A) Der Algorithmus terminiert:

in jedem Durchlauf der while-Schleife wird wenigstens eine atomare Formel markiert. Nach endlich vielen Schritten terminiert die Schleife also.

(B) Wenn der Algorithmus eine atomare Formel q markiert und wenn $\mathcal{B}$ eine B-Belegung ist, die Γ erfüllt, dann gilt $\mathcal{B}(q) = 1_B$.

Beweis: wir zeigen induktiv über n: Wenn q in einem der ersten n Schleifendurchläufe markiert wird, dann gilt $\mathcal{B}(q) = 1_B$.

IA Die Aussage gilt offensichtlich für $n = 0$.

IS werde die atomare Formel q in einem der ersten n Schleifendurchläufe markiert.

Dann gibt es eine Hornklausel $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \to q$, so daß $p_1, \ldots, p_k$ in den ersten $n - 1$ Schleifendurchläufen markiert wurden.

Also gilt $\mathcal{B}(p_1) = \cdots = \mathcal{B}(p_k) = 1_B$ nach IV.

Da $\mathcal{B}$ alle Hornformeln aus Γ erfüllt, gilt insbesondere $\mathcal{B}(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \to q) = 1_B$ und damit $\mathcal{B}(q) = 1_B$.

(C) Wenn der Algorithmus „unerfüllbar“ ausgibt, dann ist Γ unerfüllbar.

Beweis: indirekt, wir nehmen also an, daß der Algorithmus „unerfüllbar“ ausgibt, $\mathcal{B}$ aber eine B-Belegung ist, die Γ erfüllt.

Sei $\{p_1, \ldots, p_k\} \to \perp$ die Hornklausel aus Γ, die die Ausgabe „unerfüllbar“ verursacht (d.h. die atomaren Formeln $p_1, \ldots, p_k$ sind markiert).

Nach (B) gilt $\mathcal{B}(p_1) = \cdots = \mathcal{B}(p_k) = 1_B$, also $\mathcal{B}(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \to \perp) = 0_B$ im Widerspruch zur Annahme, daß $\mathcal{B}$ alle Hornklauseln aus Γ erfüllt.

Also kann es keine erfüllende B-Belegung von Γ geben.

(D) Wenn der Algorithmus „erfüllbar" ausgibt, dann erfüllt die folgende B-Belegung alle Formeln aus Γ:

$$\mathcal{B}(p_i) = \begin{cases} 1_B & \text{der Algorithmus markiert } p_i \\ 0_B & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Sei $M \to q$ eine beliebige Hornklausel aus Γ.

- Ist ein $p \in M$ nicht markiert, so gilt $\mathcal{B}(\bigwedge_{p \in M} p) = 0_B$ und damit $\mathcal{B}(M \to q) = 1_B$.
- Sind alle $p \in M$ markiert, so wird auch q markiert, also $\mathcal{B}(q) = 1_B$ und damit $\mathcal{B}(M \to q) = 1_B$.
- Gilt $q = \perp$, so existiert unmarkiertes $p \in M$ (da der Algorithmus sonst „unerfüllbar" ausgegeben hätte), also $\mathcal{B}(M \to \perp) = 1_B$ wie im ersten Fall.

Also gilt $\mathcal{B}(M \to q) = 1_B$ für alle Hornklauseln aus Γ, d.h. Γ ist erfüllbar.

Satz

Sei Γ endliche Menge von Hornklauseln. Dann terminiert der Markierungsalgorithmus mit dem korrekten Ergebnis.

Beweis: Die Aussagen (A)-(D) beweisen diesen Satz. $\square$

Bemerkungen:

- Mit einer geeigneten Implementierung läuft der Algorithmus in linearer Zeit.
- Wir haben sogar gezeigt, daß bei Ausgabe von „erfüllbar“ eine erfüllende B-Belegung berechnet werden kann.

SLD-Resolution

Definition

Sei Γ eine Menge von Hornklauseln. Eine SLD-Resolution aus Γ ist eine Folge $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, \dots, M_m \to \bot)$ von Hornklauseln mit

- $(M_0 \to \bot) \in \Gamma$
- für alle $0 \leq n < m$ existiert $(N \to q) \in \Gamma$ mit $q \in M_n$ und $M_{n+1} = M_n \setminus \{q\} \cup N$

Beispiel

$\Gamma = \{\{BH\} \to AK, \{AK, BH\} \to \bot, \{RL, AK\} \to BH, \emptyset \to RL, \emptyset \to AK\}$

$M_0 = \{AK, BH\}$
$M_1 = M_0 \setminus \{BH\} \cup \{RL, AK\} = \{RL, AK\}$
$M_2 = M_1 \setminus \{RL\} \cup \emptyset = \{AK\}$
$M_3 = M_2 \setminus \{AK\} \cup \emptyset = \emptyset$

Lemma A

Sei Γ eine (u.U. unendliche) Menge von Hornklauseln und $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, \dots, M_m \to \bot)$ eine SLD-Resolution aus Γ mit $M_m = \emptyset$. Dann ist Γ nicht erfüllbar.

Beweis: indirekt: angenommen, es gibt B-Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(N \to q) = 1_B$ für alle $(N \to q) \in \Gamma$.

Wir zeigen für alle $0 \le n \le m$ per Induktion über n:

$$\text{es gibt } p \in M_n \text{ mit } \mathcal{B}(p) = 0_B \tag{4}$$

IA $n = 0$: $(M_0 \to \bot, \dots)$ SLD-Resolution $\Rightarrow (M_0 \to \bot) \in \Gamma$

$\Rightarrow \mathcal{B}(M_0 \to \bot) = 1_B$

$\Rightarrow$ es gibt $p \in M_0$ mit $\mathcal{B}(p) = 0_B$

IV sei $n < m$ und $p \in M_n$ mit $\mathcal{B}(p) = 0_B$

IS $(\ldots, M_n \to \bot, M_{n+1} \to \bot, \ldots)$ SLD-Resolution

$\Rightarrow$ es gibt $(N \to q) \in \Gamma$ mit $M_{n+1} = M_n \setminus \{q\} \cup N$ und $q \in M_n$

zwei Fälle werden unterschieden:

1. $p \neq q$: dann gilt $p \in M_{n+1}$ mit $\mathcal{B}(p) = 0_B$
2. $p = q$: $(N \to q) \in \Gamma \Longrightarrow \mathcal{B}(N \to q) = 1_B$

   $\xRightarrow{\mathcal{B}(q)=0_B}$ es gibt $p' \in N \subseteq M_{n+1}$ mit $\mathcal{B}(p') = 0_B$

in jedem der zwei Fälle gilt also (4) für $n + 1$.

Damit ist der induktive Beweis von (4) abgeschlossen.

Mit $m = n$ haben wir insbesondere

$$\text{es gibt } p \in M_m \text{ mit } \mathcal{B}(p) = 0_B$$

im Widerspruch zu $M_m = \emptyset$.

Damit ist der indirekte Beweis abgeschlossen. $\square$

Lemma B

Sei Γ eine (u.U. unendliche) unerfüllbare Menge von Hornklauseln. Dann existiert eine SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, \ldots, M_m \to \bot)$ aus Γ mit $M_m = \emptyset$.

Beweis:

Endlichkeitssatz (Folie 5.21): es gibt $\Delta \subseteq \Gamma$ endlich und unerfüllbar.

Satz auf Folie 6.11: bei Eingabe von Δ terminiert Markierungsalgorithmus mit „unerfüllbar"

$r \geq 0$ … Anzahl der Runden

q_i … Atomformel, die in i Runde markiert wird $(1 \leq i \leq r)$

Behauptung: Es gibt $m \leq r$ und SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, \ldots, M_m \to \bot)$ aus Δ mit $M_m = \emptyset$ und

$$M_n \subseteq \{q_1, q_2, \ldots, q_{r-n}\} \text{ f.a. } 0 \leq n \leq m. \tag{5}$$

Beweis der Behauptung: Wir konstruieren die Hornklauseln $M_i \to \bot$ induktiv:

IA Da der Markierungsalgorithmus mit „unerfüllbar“ terminiert, existiert eine Hornklausel $(M_0 \to \bot) \in \Gamma$ mit $M_0 \subseteq \{q_1, \ldots, q_{r-0}\}$.
$(M_0 \to \bot)$ ist SLD-Resolution aus Δ, die (5) erfüllt.

IV Sei $n \leq r$ und $(M_0 \to \bot, \ldots, M_n \to \bot)$ SLD-Resolution, so daß (5) gilt.

IS wir betrachten drei Fälle:

1. Fall $M_n = \emptyset$: mit $m := n$ ist Beweis der Beh. abgeschlossen.
2. Fall $n = r$: Nach (5) gilt $M_n \subseteq \{q_1, \ldots, q_{r-n}\} = \emptyset$.
   Mit $m := n$ ist der Beweis der Beh. abgeschlossen.
3. Fall $n < r$ und $M_n \neq \emptyset$. Sei k maximal mit $q_k \in M_n \subseteq \{q_1, q_2, \ldots, q_{r-n}\}$.
   Also existiert $(N \to q_k) \in \Delta$, so daß $N \subseteq \{q_1, \ldots, q_{k-1}\}$. Setze
   $M_{n+1} = M_n \setminus \{q_k\} \cup N \subseteq \{q_1, \ldots, q_{k-1}\} \subseteq \{q_1, \ldots, q_{r-(n+1)}\}$.

Damit ist der induktive Beweis der Beh. abgeschlossen, woraus das Lemma unmittelbar folgt. $\square$

Satz

Sei Γ eine (u.U. unendliche) Menge von Hornklauseln. Dann sind äquivalent:

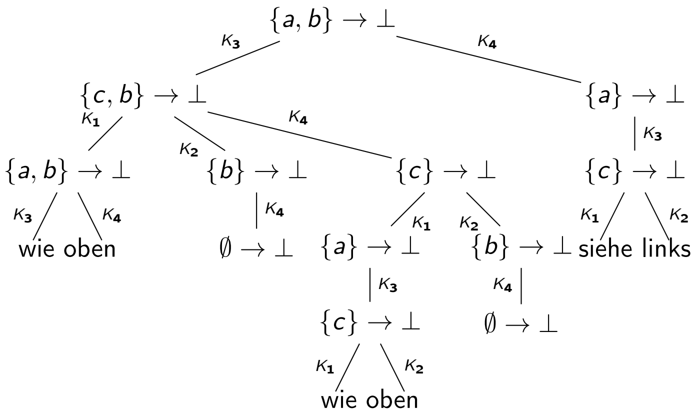
1. Γ ist nicht erfüllbar.
2. Es gibt eine SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, \ldots, M_m \to \bot)$ aus Γ mit $M_m = \emptyset$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Lemmata A und B. □

Beispiel

$$\Gamma = \{\underbrace{\{a, b\} \to \bot}_{K_0}, \underbrace{\{a\} \to c}_{K_1}, \underbrace{\{b\} \to c}_{K_2}, \underbrace{\{c\} \to a}_{K_3}, \underbrace{\emptyset \to b}_{K_4}\}$$

alle SLD-Resolutionen aus Γ kann man durch einen Baum beschreiben:



Die Suche nach einer SLD-Resolution mit $M_m = \emptyset$ kann grundsätzlich auf zwei Arten erfolgen:

- Breitensuche:
  - findet SLD-Resolution mit $M_m = \emptyset$ (falls sie existiert), da Baum endlich verzweigend ist (d.h. die Niveaus sind endlich)
  - hoher Platzbedarf, da ganze Niveaus abgespeichert werden müssen (in einem Binärbaum der Tiefe n kann es Niveaus der Größe 2^n geben)
- Tiefensuche:
  - geringerer Platzbedarf (in einem Binärbaum der Tiefe n hat jeder Ast die Länge $\leq n$)
  - findet existierende SLD-Resolution mit $M_m = \emptyset$ nicht immer (siehe Beispiel)

Zusammenfassung Aussagenlogik

- Das natürliche Schließen formalisiert die „üblichen“ Argumente in mathematischen Beweisen.
- Unterschiedliche Wahrheitswertebereiche formalisieren unterschiedliche Vorstellungen von „Wahrheit“.
- Das natürliche Schließen ist vollständig und korrekt für den Booleschen Wahrheitswertebereich.
- Der Markierungsalgorithmus und die SLD-Resolution sind praktikable Verfahren, um die Erfüllbarkeit von Hornformeln zu bestimmen.