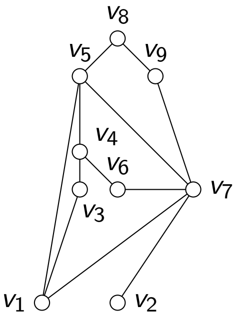
Kapitel 2: Prädikatenlogik

Beispiel: Graphen



Um über diesen Graphen Aussagen in der Aussagenlogik zu machen, verwenden wir Formeln $\varphi_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq 9$ mit

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} \neg\bot & \text{falls } (v_i, v_j) \text{ Kante} \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

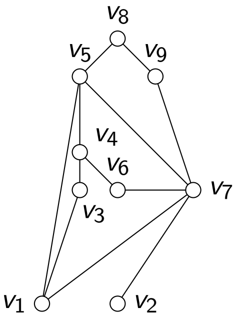
Die aussagenlogische Formel

$$\bigvee_{1 \leq i,j \leq 9} \varphi_{i,j}$$

sagt aus, daß der Graph eine Kante enthält.

Man kann so vorgehen, wenn der Graph bekannt und endlich ist.
Sollen analoge Aussagen für einen anderen Graphen gemacht werden, so ist die Kodierungsarbeit zu wiederholen.

Beispiel: Graphen



Um über diesen Graphen Aussagen in der Aussagenlogik zu machen, verwenden wir Formeln $\varphi_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq 9$ mit

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} \neg\bot & \text{falls } (v_i, v_j) \text{ Kante} \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

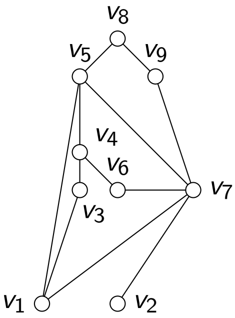
Die aussagenlogische Formel

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq 9} \bigvee_{1 \leq j \leq 9} \varphi_{i,j}$$

sagt aus, daß jeder Knoten einen Nachbarn hat.

Man kann so vorgehen, wenn der Graph bekannt und endlich ist.
Sollen analoge Aussagen für einen anderen Graphen gemacht werden, so ist die Kodierungsarbeit zu wiederholen.

Beispiel: Graphen



Um über diesen Graphen Aussagen in der Aussagenlogik zu machen, verwenden wir Formeln $\varphi_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq 9$ mit

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} \neg\bot & \text{falls } (v_i, v_j) \text{ Kante} \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

Die aussagenlogische Formel

$$\bigvee_{1 \leq i,j,k \leq 9 \text{ verschieden}} \varphi_{i,j} \wedge \varphi_{j,k} \wedge \varphi_{k,i}$$

sagt aus, daß der Graph ein Dreieck enthält.

Man kann so vorgehen, wenn der Graph bekannt und endlich ist.
Sollen analoge Aussagen für einen anderen Graphen gemacht werden, so ist die Kodierungsarbeit zu wiederholen.

Beispiel: Datenbanken

Im folgenden reden wir über die Studenten und die Lehrenden in Veranstaltungen zur Theoretischen Informatik in diesem Semester.

Betrachte die folgenden Aussagen:

- Jeder ist Student oder wissenschaftlicher Mitarbeiter oder Professor.
- Dietrich Kuske ist Professor.
- Kein Student ist Professor.
- Jeder Student ist jünger als jeder Professor.
- Es gibt eine Person, die an den Veranstaltungen „Logik und Logikprogrammierung“ und „Algorithmen und Datenstrukturen“ teilnimmt.
- Es gibt eine Person, die kein wissenschaftlicher Mitarbeiter ist und nicht an beiden Veranstaltungen teilnimmt.
- Jeder Student ist jünger als die Person, mit der er am besten über Informatik reden kann.

Um sie in der Aussagenlogik machen zu können, müssen wir atomare Aussagen für „Hans ist Student“, „Otto ist jünger als Ottilie“ usw. einführen.

Dies ist nur möglich, wenn

1. alle involvierten Personen bekannt sind und fest stehen und
2. es nur endlich viele involvierte Personen gibt.

Sollen analoge Aussagen für das vorige oder das kommende Jahr gemacht werden, so ist die gesamte Kodierungsarbeit neu zu machen.

Kodierung in einer „Struktur“

Grundmenge:	Die Studenten und die Lehrenden in Veranstaltungen zur Theoretischen Informatik in diesem Sommersemester
Teilmengen:	
$S(x)$	„x ist Student“
$LuLP(x)$	„x nimmt an der Veranstaltung LuLP teil“
$AuD(x)$	„x nimmt an der Veranstaltung AuD teil“
$Pr(x)$	„x ist Professor“
$WM(x)$	„x ist wissenschaftlicher Mitarbeiter“
Relationen:	
$J(x, y)$	„x ist jünger als y“
Funktion:	
$f(x)$	ist diejenige Person (aus dem genannten Kreis), mit der x am besten über Informatik reden kann.
Konstante:	
dk	Dietrich Kuske

Die in der Aussagenlogik nur schwer formulierbaren Aussagen werden nun

- Für alle x gilt $S(x) \vee WM(x) \vee Pr(x)$
- $Pr(dk)$
- Für alle x gilt $S(x) \rightarrow \neg Pr(x)$
- Für alle x und y gilt $(S(x) \wedge Pr(y)) \rightarrow J(x, y)$
- Es gibt ein x mit $LuLP(x) \wedge AuD(x)$
- Es gibt ein x mit $((\neg LuLP(x) \vee \neg AuD(x)) \wedge \neg WM(x))$
- Für alle x gilt $S(x) \rightarrow J(x, f(x))$

Abkürzungen: $\forall$ „für alle“ und $\exists$ „es gibt“.

Bemerkung: Diese Formulierungen sind auch brauchbar, wenn die Grundmenge unendlich ist. Sie sind auch unabhängig vom Jahr (ich kann im nächsten Jahr diese Folien wieder verwenden).

Ziel

Wir wollen in der Lage sein, über Sachverhalte in „**Strukturen**“ (Graphen, Datenbanken, relle Zahlen, Gruppen . . .) zu reden.

Dabei soll es „**Relationen**“ geben, durch die das Enthaltensein in einer Teilmenge oder Beziehungen zwischen Objekten ausgedrückt werden können (z.B. $S(x)$, $J(x, y)$, . . .)

Weiter soll es „**Funktionen**“ geben, durch die Objekte (oder Tupel von Objekten) auf andere Objekte abgebildet werden (z.B. f)

Nullstellige Funktionen (ohne Argumente): Konstante (z.B. dk)

Fragen

- Nach welchen Regeln bildet man korrekte Formeln?
- Was ist eine Struktur?
- Wann hat eine Aussage in einer Struktur eine Bedeutung (ist „sinnvoll“)?
- Wann „gilt“ eine Aussage in einer Struktur?
- Gibt es Formeln, die in allen Strukturen gelten?
- Kann man solche Formeln algorithmisch identifizieren? Gibt es einen Beweiskalkül wie das natürliche Schließen oder die SLD-Resolution?
- ....

Syntax der Prädikatenlogik

Formeln machen Aussagen über Strukturen. Dabei hat es keinen Sinn zu fragen, ob eine Formel, die über Studenten etc. redet, im Graphen G gilt.

Definition

Eine Signatur ist ein Tripel $\Sigma = (\Omega, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$, wobei Ω und Rel disjunkte Mengen von Funktions- und Relationsnamen sind und $\mathrm{ar}\colon \Omega \cup \mathrm{Rel} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung ist.

Beispiel: $\Omega = \{f, dk\}$ mit $\mathrm{ar}(f) = 1$, $\mathrm{ar}(dk) = 0$ und
$\mathrm{Rel} = \{S, LuLP, AuD, Pr, WM, J\}$ mit
$\mathrm{ar}(S) = \mathrm{ar}(LuLP) = \mathrm{ar}(AuD) = \mathrm{ar}(Pr) = \mathrm{ar}(WM) = 1$ und $\mathrm{ar}(J) = 2$
bilden die Signatur der Datenbank von Folie 7.3 ff.

typische Funktionsnamen: f, g, a, b ... mit $\mathrm{ar}(f), \mathrm{ar}(g) > 0$ und $\mathrm{ar}(a) = \mathrm{ar}(b) = 0$

typische Relationsnamen: R, S, ...

Definition

Die Menge der Variablen ist $\mathrm{Var} = \{x_0, x_1, \ldots\}$.

Sei Σ eine Signatur. Die Menge T_Σ der Σ-Terme ist induktiv definiert:

1. Jede Variable ist ein Term, d.h. $\mathrm{Var} \subseteq T_\Sigma$
2. ist $f \in \Omega$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und sind $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma$, so gilt $f(t_1, \ldots, t_k) \in T_\Sigma$
3. Nichts ist Σ-Term, was sich nicht mittels der obigen Regeln erzeugen läßt.

Beispiel: In der Signatur der Datenbank von Folie 7.3 ff. haben wir u.a. die folgenden Terme:

- x_1 und x_8
- $f(x_0)$ und $f(f(x_3))$
- $dk()$ und $f(dk())$ - hierfür schreiben wir kürzer dk bzw. $f(dk)$

Definition

Sei Σ Signatur. Die atomaren Σ-Formeln sind die Zeichenketten der Form

- $R(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ falls $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T_\Sigma$ und $R \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(R) = k$ oder
- $t_1 = t_2$ falls $t_1, t_2 \in T_\Sigma$ oder
- $\perp$.

Beispiel: In der Signatur der Datenbank von Folie 7.3 ff. haben wir u.a. die folgenden atomaren Formeln:

- $S(x_1)$ und $LuLP(f(x_4))$
- $S(dk)$ und $AuD(f(dk))$

Definition

Sei Σ Signatur. Σ-Formeln werden durch folgenden induktiven Prozeß definiert:

1. Alle atomaren Σ-Formeln sind Σ-Formeln.
2. Falls φ und ψ Σ-Formeln sind, sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ und $(\varphi \rightarrow \psi)$ Σ-Formeln.
3. Falls φ eine Σ-Formel ist, ist auch $\neg\varphi$ eine Σ-Formel.
4. Falls φ eine Σ-Formel und $x \in \mathrm{Var}$, so sind auch $\forall x\, \varphi$ und $\exists x\, \varphi$ Σ-Formeln.
5. Nichts ist Σ-Formel, was sich nicht mittels der obigen Regeln erzeugen läßt.

Ist die Signatur Σ aus dem Kontext klar, so sprechen wir einfach von Termen, atomaren Formeln bzw. Formeln.

Beispiel: In der Signatur der Datenbank von Folie 7.3 ff. haben wir u.a. die folgenden Formeln:

- $\forall x_0\,(S(x_0) \vee WM(x_0) \vee Pr(x_0))$
- $Pr(dk)$
- $\forall x_3\,(S(x_3) \rightarrow \neg Pr(x_3))$
- $\forall x_0 \forall x_2\,((S(x_0) \wedge Pr(x_2)) \rightarrow J(x_0, x_2))$
- $\exists x_1\,(LuLP(x_1) \wedge AuD(x_1))$
- $\exists x_2\,((\neg LuLP(x_2) \vee \neg AuD(x_2)) \wedge \neg WM(x_2))$
- $\forall x_1\,(S(x_1) \rightarrow J(x_1, f(x_1)))$

Wir verwenden die aus der Aussagenlogik bekannten Abkürzungen, z.B. steht $\varphi \leftrightarrow \psi$ für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Zur verbesserten Lesbarkeit fügen wir mitunter hinter quantifizierten Variablen einen Doppelpunkt ein, z.B. steht $\exists x\, \forall y\colon \varphi$ für $\exists x\, \forall y\, \varphi$

Ebenso verwenden wir Variablennamen x, y, z u.ä.

Präzedenzen: $\neg$, $\forall x$, $\exists x$ binden am stärksten

Beispiel: $(\neg\forall x\colon R(x, y) \wedge \exists z\colon R(x, z)) \to P(x, y, z)$ steht für $((\neg(\forall x\colon R(x, y)) \wedge \exists z\colon R(x, z)) \to P(x, y, z))$

Aufgabe

Im folgenden seien

- P ein-stelliges, Q und R zwei-stellige Relationssymbole,
- a null-stelliges und f ein-stelliges Funktionssymbol und
- x, y und z Variable.

Welche der folgenden Zeichenketten sind Formeln?

$\forall x\, P(a)$	
$\forall x\, \exists y\, (Q(x,y) \vee R(x))$	
$\forall x\, Q(x,x) \to \exists x\, Q(x,y)$	
$\forall x\, P(f(x)) \vee \forall x\, Q(x,x)$	
$\forall x\, (P(y) \wedge \forall y\, P(x))$	
$P(x) \to \exists x\, Q(x, P(x))$	
$\forall f\, \exists x\, P(f(x))$	

Definition

Sei Σ eine Signatur. Die Menge $FV(\varphi)$ der freien Variablen einer Σ-Formel φ ist induktiv definiert:

- Ist φ atomare Σ-Formel, so ist $FV(\varphi)$ die Menge der in φ vorkommenden Variablen.
- $FV(\varphi \square \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ für $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$
- $FV(\exists x\, \varphi) = FV(\forall x\, \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$.

Eine Σ-Formel φ ist geschlossen, ein Σ-Satz oder eine Aussage, wenn $FV(\varphi) = \emptyset$ gilt.

Aufgabe (vgl. Folie 7.15)

Was sind die freien Variablen der folgenden Formeln? Welche Formeln sind Sätze?

$\forall x\, P(a)$		
$\forall x\, Q(x,x) \to \exists x\, Q(x,y)$		
$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x,x)$		
$\forall x\, (P(y) \wedge \forall y\, P(x))$		
$\forall x\, (\neg \forall y\, Q(x,y) \wedge R(x,y))$		
$\exists z\, (Q(z,x) \vee R(y,z)) \to \exists y\, (R(x,y) \wedge Q(x,z))$		
$\exists x\, (\neg P(x) \vee P(f(a)))$		
$P(x) \to \exists x\, P(x)$		
$\exists x \forall y\, ((P(y) \to Q(x,y)) \vee \neg P(x))$		
$\exists x\, \forall x\, Q(x,x)$		

Semantik der Prädikatenlogik

Erinnerung: Die Frage „Ist die aussagenlogische Formel φ wahr oder falsch?“ war sinnlos, denn wir wissen i.a. nicht, ob die atomaren Aussagen wahr oder falsch sind.

Analog: Die Frage „Ist die prädikatenlogische Formel φ wahr oder falsch?“ ist sinnlos, denn wir wissen bisher nicht, über welche Objekte, über welche „Struktur“ φ spricht.

Definition

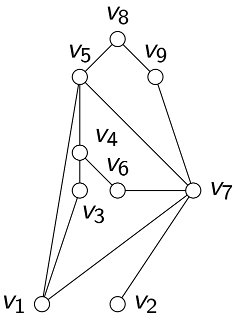
Sei Σ eine Signatur. Eine Σ-Struktur ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, (f^\mathcal{A})_{f\in\Omega}, (R^\mathcal{A})_{R\in\mathrm{Rel}})$, wobei

- $U_\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge, das Universum,
- $R^\mathcal{A} \subseteq U_\mathcal{A}^{\mathrm{ar}(R)}$ eine Relation der Stelligkeit $\mathrm{ar}(R)$ für $R \in \mathrm{Rel}$ und
- $f^\mathcal{A} \colon U_\mathcal{A}^{\mathrm{ar}(f)} \to U_\mathcal{A}$ eine Funktion der Stelligkeit $\mathrm{ar}(f)$ für $f \in \Omega$ ist.

Bemerkung: $U_\mathcal{A}^0 = \{()\}$.

- Also ist $a^\mathcal{A} \colon U_\mathcal{A}^0 \to U_\mathcal{A}$ für $a \in \Omega$ mit $\mathrm{ar}(a) = 0$ vollständig gegeben durch $a^\mathcal{A}(()) \in U_\mathcal{A}$. Wir behandeln 0-stellige Funktionen daher als Konstanten.
- Weiterhin gilt $R^\mathcal{A} = \emptyset$ oder $R^\mathcal{A} = \{()\}$ für $R \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(R) = 0$.

Beispiel:



Sei $\Sigma = (\Omega, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$ mit $\Omega = \emptyset$, $\mathrm{Rel} = \{E\}$ und $\mathrm{ar}(E) = 2$ die Signatur der Graphen.

Um den Graphen als Σ-Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, E^\mathcal{A})$ zu betrachten, setzen wir

- $U_\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_9\}$ und
- $E^\mathcal{A} = \{(v_i, v_j) \mid (v_i, v_j) \text{ ist Kante}\}$

Im folgenden sei Σ eine Signatur, $\mathcal{A}$ eine Σ-Struktur und $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ eine Abbildung (eine Variableninterpretation).

Wir definieren eine Abbildung $\rho'\colon T_\Sigma \to U_{\mathcal{A}}$ induktiv für $t \in T_\Sigma$:

- ist $t \in \mathrm{Var}$, so setze $\rho'(t) = \rho(t)$
- ansonsten existieren $f \in \Omega$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma$ mit $t = f(t_1, \ldots, t_k)$. Dann setze $\rho'(t) = f^{\mathcal{A}}(\rho'(t_1), \ldots, \rho'(t_k))$.

Die Abbildung ρ' ist die übliche „Auswertungsabbildung“.

Zur Vereinfachung schreiben wir auch $\rho(t)$ an Stelle von $\rho'(t)$.

Beispiel:

- Seien $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, f^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}})$ mit $f^{\mathcal{A}}$ die Subtraktion und a nullstelliges Funktionssymbol mit $a^{\mathcal{A}} = 10$. Seien weiter $x, y \in \mathrm{Var}$ mit $\rho(x) = 7$ und $\rho(y) = -2$. Dann gilt

$$\rho(f(a, f(x, y))) = \rho(a) - (\rho(x) - \rho(y)) = a^{\mathcal{A}} - (\rho(x) - \rho(y)) = 1$$

- Seien $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}})$ mit $f^{\mathcal{A}}$ die Maximumbildung, a nullstelliges Funktionssymbol mit $a^{\mathcal{A}} = 10$. Seien weiter $x, y \in \mathrm{Var}$ mit $\rho(x) = 7$ und $\rho(y) = -2$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\rho(f(a, f(x, y))) &= \max(\rho(a), \max(\rho(x), \rho(y)) \\ &= \max(a^{\mathcal{A}}, \max(\rho(x), \rho(y))) = 10\end{aligned}$$

Bemerkung: Wir müssten also eigentlich noch vermerken, in welcher Struktur $\rho(t)$ gebildet wird – dies wird aber aus dem Kontext immer klar sein.

Für eine Σ-Formel φ definieren wir die Gültigkeit in einer Σ-Struktur $\mathcal{A}$ unter der Variableninterpretation ρ (in Zeichen: $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$) induktiv:

- $\mathcal{A} \models_\rho \bot$ gilt nicht.
- $\mathcal{A} \models_\rho R(t_1, \ldots, t_k)$ falls $(\rho(t_1), \ldots, \rho(t_k)) \in R^{\mathcal{A}}$ für $R \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(R) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma$.
- $\mathcal{A} \models_\rho t_1 = t_2$ falls $\rho(t_1) = \rho(t_2)$ für $t_1, t_2 \in T_\Sigma$.

Für Σ-Formeln φ und ψ und $x \in \mathrm{Var}$:

- $\mathcal{A} \models_\rho \varphi \wedge \psi$ falls $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ und $\mathcal{A} \models_\rho \psi$.
- $\mathcal{A} \models_\rho \varphi \vee \psi$ falls $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ oder $\mathcal{A} \models_\rho \psi$.
- $\mathcal{A} \models_\rho \varphi \to \psi$ falls nicht $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ oder $\mathcal{A} \models_\rho \psi$.
- $\mathcal{A} \models_\rho \neg\varphi$ falls $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ nicht gilt.
- $\mathcal{A} \models_\rho \exists x\, \varphi$ falls ???
- $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\, \varphi$ falls ???

Für $x \in \mathrm{Var}$ und $a \in U_\mathcal{A}$ sei $\rho[x \mapsto a] \colon \mathrm{Var} \to U_\mathcal{A}$ die Variableninterpretation, für die gilt

$$(\rho[x \mapsto a])(y) = \begin{cases} \rho(y) & \text{falls } x \neq y \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\mathcal{A} \models_\rho \exists x\, \varphi$ falls es $a \in U_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \varphi$.
- $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\, \varphi$ falls $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \varphi$ für alle $a \in U_\mathcal{A}$.

Definition

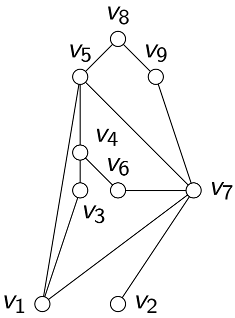
Sei Σ eine Signatur, φ eine Σ-Formel, Δ eine Menge von Σ-Formeln und $\mathcal{A}$ eine Σ-Struktur.

$\mathcal{A} \models \varphi$ ($\mathcal{A}$ ist Modell von φ) falls $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ für alle Variableninterpretationen ρ gilt.

$\mathcal{A} \models \Delta$ falls $\mathcal{A} \models \psi$ für alle $\psi \in \Delta$.

Aufgaben

Sei $\mathcal{A}$ die Struktur, die dem folgenden Graphen entspricht (vgl. Folie 7.20)



Welche der folgenden Formeln φ gelten in $\mathcal{A}$, d.h. für welche Formeln gilt $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ für alle Variableninterpretationen ρ?

1. $\exists x\, \exists y : E(x, y)$
2. $\forall x\, \exists y : E(x, y)$
3. $\exists x\, \forall y : (x \neq y \rightarrow E(x, y))$
4. $\forall x\, \forall y : (x \neq y \rightarrow E(x, y))$
5. $\exists x\, \exists y\, \exists z : (E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(z, x))$

In der Prädikatenlogik ist es also möglich, die Eigenschaften von Folie 7.2 auszudrücken, ohne den Graphen direkt in die Formel zu kodieren.