∀-Einführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „für alle x gilt φ“ sieht üblicherweise so aus:

> „Sei x beliebig, aber fest.
> Jetzt zeige ich φ (hier steckt die eigentliche Arbeit).
> Da x beliebig war, haben wird „für alle x gilt φ“ gezeigt. qed“

∀-Einführung (ausführlich)

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ und sei x eine Variable, die in keiner Formel aus Γ frei vorkommt.

Dann ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\forall x\, \varphi$:

$$\frac{\varphi}{\forall x\, \varphi}$$

$\forall$-Einführung (Kurzform)

$$\frac{\varphi}{\forall x\, \varphi}\,(\forall\text{-I})$$

Bedingung: x kommt in keiner Hypothese frei vor

Lemma V2

Sei Σ eine Signatur, Γ eine Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ, die die Regeln des natürlichen Schließens der Aussagenlogik, (R), (GfG) und ($\forall$-I) verwendet. Dann gilt $\Gamma \models \varphi$.

Beweis: Betrachte die folgende Deduktion D:

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \overset{E}{\triangledown}\\ \dfrac{\varphi}{\forall x\,\varphi}\,(\forall\text{-I})\end{array}$$

Insbesondere ist x keine freie Variable einer Formel aus Γ und es gilt nach IV $\Gamma \models \varphi$.

Sei nun $\mathcal{A}$ Σ-Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_\rho \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

Zu zeigen ist $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\,\varphi$:

Sei also $a \in U_\mathcal{A}$ beliebig.

$\Longrightarrow$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \gamma$ da $x \notin FV(\gamma)$ und $\mathcal{A} \models_\rho \gamma$

$\xRightarrow{\Gamma \models \varphi}$ $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \varphi$

Da $a \in U_\mathcal{A}$ beliebig war, haben wir $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\,\varphi$ gezeigt

Da $\mathcal{A}$ und ρ beliebig waren mit $\mathcal{A} \models_\rho \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$ haben wir also $\Gamma \models \forall x\,\varphi$ gezeigt. $\square$

∀-Elimination in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „t erfüllt φ“ kann so aussehen:

> „Zunächst zeige ich $\forall x\, \varphi$ (hier steckt die eigentliche Arbeit). Damit erfüllt insbesondere t die Aussage φ, d.h., wir haben „t erfüllt φ“ gezeigt. qed“

∀-Elimination (ausführlich)

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\forall x\, \varphi$ und sei t Term, so daß Substitution $[x := t]$ für φ zulässig ist.

Dann ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\varphi[x := t]$:

$$\frac{\forall x\, \varphi}{\varphi[x := t]}$$

$\forall$-Elimination (Kurzform)

$$\frac{\forall x\, \varphi}{\varphi[x := t]}\ (\forall\text{-E})$$

Bedingung: über keine Variable aus t wird in φ quantifiziert

Lemma V3

Sei Σ eine Signatur, Γ eine Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ, die die Regeln des natürlichen Schließens der Aussagenlogik, (R), (GfG), ($\forall$-I) und ($\forall$-E) verwendet. Dann gilt $\Gamma \models \varphi$.

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma V2. $\square$

$\exists$-Elimination in math. Beweisen

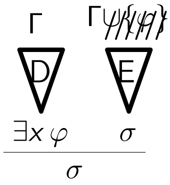
Ein Beweis von „σ gilt“ kann so aussehen:

> „Zunächst zeige ich $\exists x\, \varphi$ (hier steckt Arbeit).
> Jetzt zeige ich, daß σ immer gilt, wenn φ gilt (mehr Arbeit).
> Damit gilt σ. qed“

$\exists$-Elimination (ausführlich)

Sei Γ eine Menge von Formeln, die die Variable x nicht frei enthalten und enthalte die Formel σ die Variabel x nicht frei.

Wenn D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\exists x\, \varphi$ und E eine Deduktion mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\varphi\}$ und Konklusion σ ist, dann ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion σ:



$\exists$-Elimination (Kurzform)

$$\dfrac{\exists x\, \varphi \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\ (\exists\text{-E})$$

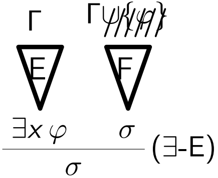
Bedingung: x kommt in den Hypothesen und in σ nicht frei vor

Lemma V4

Sei Σ eine Signatur, Γ eine Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ, die die Regeln des natürlichen Schließens der Aussagenlogik, (R), (GfG), ($\forall$-I), ($\forall$-E) und ($\exists$-E) verwendet. Dann gilt $\Gamma \models \varphi$.

Beweis: Sei D die folgende Deduktion:



Insbesondere kommt x in den Formeln aus $\Gamma \cup \{\sigma\}$ nicht frei vor. Außerdem gelten nach IV $\Gamma \models \exists x\,\varphi$ und $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \sigma$.

Sei nun $\mathcal{A}$ Σ-Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_\rho \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

Zu zeigen ist $\mathcal{A} \models_\rho \sigma$:

Wegen $\mathcal{A} \models_\rho \exists x\,\varphi$ existiert $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \varphi$.

x kommt in Formeln aus Γ nicht frei vor $\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

Aus $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \sigma$ folgt $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \sigma$.

Da $x \notin FV(\sigma)$ erhalten wir $\mathcal{A} \models_\rho \sigma$.

Da $\mathcal{A}$ und ρ beliebig waren mit $\mathcal{A} \models_\rho \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$ haben wir also $\Gamma \models \sigma$ gezeigt. $\square$

∃-Einführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „es gibt ein x, das φ erfüllt“ sieht üblicherweise so aus:

> „betrachte dieses t (hier ist Kreativität gefragt).
> Jetzt zeige ich, daß t φ erfüllt (u.U. harte Arbeit).
> Also haben wir „es gibt ein x, das φ erfüllt“ gezeigt. qed“

∃-Einführung (ausführlich)

Sei die Substitution $[x := t]$ für die Formel φ zulässig.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\varphi[x := t]$.

Dann ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\exists x\,\varphi$:

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ D\\ \varphi[x := t]\\ \hline \exists x\,\varphi\end{array}$$

$\exists$-Einführung (Kurzform)

$$\frac{\varphi[x := t]}{\exists x\, \varphi}\,(\exists\text{-I})$$

Bedingung: über keine Variable in t wird in φ quantifiziert

Korrektheitslemma für das natürliche Schließen in der Prädikatenlogik

Sei Σ eine Signatur, Γ eine Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ, die die Regeln des natürlichen Schließens der Aussagenlogik, (R), (GfG), ($\forall$-I), ($\forall$-E), ($\exists$-E) und ($\exists$-I) verwendet. Dann gilt $\Gamma \models \varphi$.

Beweis: analog zu obigen Beweisen. $\square$

Regeln des natürlichen Schließens III

$$\frac{}{t = t}\,(\mathrm{R})$$

$$\frac{\varphi[x := s] \quad s = t}{\varphi[x := t]}\,(\mathrm{GfG})$$

(über keine Variable aus s oder t wird in φ quantifiziert)

$$\frac{\varphi}{\forall x\, \varphi}\,(\forall\text{-I})$$

(x nicht frei in Hypothesen)

$$\frac{\forall x\, \varphi}{\varphi[x := t]}\,(\forall\text{-E})$$

(über keine Variable aus t wird in φ quantifiziert)

Regeln des natürlichen Schließens IV

$$\frac{\varphi[x := t]}{\exists x\, \varphi}\,(\exists\text{-I})$$

(über keine Variable aus t wird in φ quantifiziert)

$$\frac{\exists x\, \varphi \quad \begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \sigma\end{array}}{\sigma}\,(\exists\text{-E})$$

(x kommt in Hypothesen und σ nicht frei vor)

Definition (vgl. Folie 2.21)

Für eine Menge Γ von Σ-Formeln und eine Σ-Formel φ schreiben wir

$$\Gamma \vdash \varphi$$

wenn es eine Deduktion gibt mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ. Wir sagen „φ ist eine syntaktische Folgerung von Γ“.

Eine Formel φ ist ein Theorem, wenn $\emptyset \vdash \varphi$ gilt.

Bemerkung (vgl. Folie 2.22)

$\Gamma \vdash \varphi$ sagt (zunächst) nichts über den Inhalt der Formeln in $\Gamma \cup \{\varphi\}$ aus, sondern nur über den Fakt, daß φ mithilfe des natürlichen Schließens aus den Formeln aus Γ hergeleitet werden kann.

Ebenso sagt „φ ist Theorem“ nur, daß φ abgeleitet werden kann, über „Wahrheit“ sagt dieser Begriff (zunächst) nichts aus.

Wir haben aber *en passant* das folgende gezeigt (vgl. Satz auf Folie 4.9):

Korrektheitssatz

Für eine Menge von Σ-Formeln Γ und eine Σ-Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi\,.$$

Beispiel

Seien φ Formel und x Variable. Dann gelten

$$\{\neg\exists x\,\varphi\} \models \forall x\,\neg\varphi \text{ und } \{\forall x\,\neg\varphi\} \models \neg\exists x\,\varphi\,.$$

Beweis:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\,\varphi \qquad \dfrac{[\varphi]^2}{\exists x\,\varphi}\,(\exists\text{-I})}{\bot}\,(\neg\text{E})}{\neg\varphi}\,(\neg\text{I})^2}{\forall x\,\neg\varphi}\,(\forall\text{-I})$$

Nach dem Korrektheitssatz folgt $\{\neg\exists x\,\varphi\} \models \forall x\,\neg\varphi$.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,\varphi]^2 \qquad \dfrac{[\varphi]^1 \qquad \dfrac{\forall x\,\neg\varphi}{\neg\varphi}\,(\forall\text{-E})}{\bot}\,(\neg\text{E})}{\bot}\,(\exists\text{-E})^1}{\neg\exists x\,\varphi}\,(\neg\text{I})^2$$

Nach dem Korrektheitssatz folgt $\{\forall x\,\neg\varphi\} \models \neg\exists x\,\varphi$. $\square$

Beispiel

Seien φ Formel und x Variable. Dann gelten $\{\neg\forall x\,\varphi\} \models \exists x\,\neg\varphi$ und $\{\exists x\,\neg\varphi\} \models \neg\forall x\,\varphi$.

Beweis:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\forall x\,\varphi$}
\AxiomC{$[\neg\exists x\,\neg\varphi]^1$}
\AxiomC{$[\neg\varphi]^2$}
\RightLabel{$(\exists\text{-I})$}
\UnaryInfC{$\exists x\,\neg\varphi$}
\RightLabel{$(\neg\text{E})$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\text{raa})^2$}
\UnaryInfC{φ}
\RightLabel{$(\forall\text{-I})$}
\UnaryInfC{$\forall x\,\varphi$}
\RightLabel{$(\neg\text{E})$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\text{raa})^1$}
\UnaryInfC{$\exists x\,\neg\varphi$}
\end{prooftree}
$$

Nach dem Korrektheitssatz folgt $\{\neg\forall x\,\varphi\} \models \exists x\,\neg\varphi$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x\,\neg\varphi$}
\AxiomC{$[\neg\varphi]^1$}
\AxiomC{$[\forall x\,\varphi]^2$}
\RightLabel{$(\forall\text{-E})$}
\UnaryInfC{φ}
\RightLabel{$(\neg\text{E})$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg\text{I})^2$}
\UnaryInfC{$\neg\forall x\,\varphi$}
\RightLabel{$(\exists\text{-E})^1$}
\BinaryInfC{$\neg\forall x\,\varphi$}
\end{prooftree}
$$

Nach dem Korrektheitssatz folgt $\{\exists x\,\neg\varphi\} \models \neg\forall x\,\varphi$.

$\square$

Vollständigkeit

Können wir durch mathematische Beweise zu allen korrekten Aussagen kommen?

Können wir durch das natürliche Schließen zu allen korrekten Aussagen kommen?

Existiert eine Menge Γ von Σ-Formeln und eine Σ-Formel φ mit $\Gamma \models \varphi$ und $\Gamma \nvdash \varphi$?

Frage

Gilt

$$\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$$

bzw.

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig} \implies \varphi \text{ ist Theorem?}$$

Plan

z.z. ist $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$.

dies ist äquivalent zu $\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi$.

hierzu geht man folgendermaßen vor:

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma \nvdash \varphi & & \Gamma \not\models \varphi \\
\Updownarrow \text{(vgl. Folie 4.17)} & & \text{(vgl. Folie 5.7)} \Updownarrow \\
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent} & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(vgl. Folie 4.20)} & & \text{(klar)} \Uparrow \\
\exists\, \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ maximal konsistent} & & \Delta \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(Folie 9.19)} & & \text{(klar)} \Uparrow \\
\exists \Delta^+ \supseteq \Delta \text{ maximal konsistent mit Konkretisierungen} & \underset{\text{(Folie 9.23)}}{\Longrightarrow} & \Delta^+ \text{ erfüllbar}
\end{array}
$$

Definition

Eine Menge Δ von Formeln hat Konkretisierungen, wenn für alle $\exists x\, \varphi \in \Delta$ ein variablenloser Term t existiert mit $\varphi[x := t] \in \Delta$.

Satz

Sei Δ eine maximal konsistente Menge von Σ-Formeln. Dann existiert eine Signatur $\Sigma^+ \supseteq \Sigma$ und eine maximal konsistente Menge Δ^+ von Σ^+-Formeln mit Konkretisierungen, so daß $\Delta \subseteq \Delta^+$.

Beweis: Wir konstruieren induktiv Signaturen Σ_n, maximal konsistente Menge von Σ_n-Formeln Δ_n und konsistente Mengen von Σ_{n+1}-Formeln Δ'_{n+1} mit

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \cdots \quad \text{und} \\ \Delta &= \Delta_0 \subseteq \Delta'_1 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta'_2 \cdots \end{aligned}$$

und setzen dann

$$\Sigma^+ = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n \text{ und } \Delta^+ = \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n\,.$$

IA $\Sigma_0 := \Sigma$, $\Delta_0 := \Delta$

IV Sei $n \geq 0$ und Δ_n maximal konsistente Menge von Σ_n-Formeln.

IS Σ_{n+1}: alle Symbole aus Σ_n und, für jede Formel $\psi \in \Delta_n$ der Form $\psi = \exists x\, \varphi$, ein „neues“ Konstantensymbol c_ψ

$\Delta'_{n+1} := \Delta_n \cup \{\varphi[x := c_\psi] \mid \psi = \exists x\, \varphi \in \Delta_n\}$

ohne Beweis: Δ'_{n+1} ist konsistent
Idee: Ist φ Σ_n-Formel mit $\Delta'_{n+1} \vdash \varphi$, so gilt $\Delta_n \vdash \varphi$.
Konsistenz von Δ'_{n+1} folgt mit $\varphi = \bot$

Analog zum Satz auf Folie 4.20 existiert $\Delta_{n+1} \supseteq \Delta'_{n+1}$ maximal konsistent

Damit ist die Konstruktion der Signaturen Σ_n und der maximal konsistenten Mengen Δ_n von Σ_n-Formeln abgeschlossen.

noch z.z.: Δ^+ hat Konkretisierungen und ist maximal konsistent

- Δ^+ hat Konkretisierungen: Sei $\psi = \exists x\, \varphi \in \Delta^+$
  $\Longrightarrow$ es gibt $n \geq 0$ mit $\psi \in \Delta_n$
  $\Longrightarrow \varphi[x := c_\psi] \in \Delta'_{n+1} \subseteq \Delta_{n+1} \subseteq \Delta^+$.

- Konsistenz: (indirekt) angenommen, $\Delta^+ \vdash \perp$
  Da jede Deduktion endlich ist, existiert $\Gamma \subseteq \Delta^+$ endlich mit $\Gamma \vdash \perp$.
  $\Longrightarrow$ es gibt $n \geq 0$ mit $\Gamma \subseteq \Delta_n$
  $\Longrightarrow \Delta_n \vdash \perp$ - im Widerspruch zur Konsistenz von Δ_n.

- maximale Konsistenz: (indirekt) angenommen, Δ^+ ist nicht maximal konsistent
$\Longrightarrow$ es gibt $\Gamma \supsetneq \Delta^+$ konsistent
$\Longrightarrow$ es gibt $\varphi \in \Gamma \setminus \Delta^+$
$\Longrightarrow$ $\Delta^+ \cup \{\varphi\} \subseteq \Gamma$ konsistent

  φ ist Σ^+-Formel $\Longrightarrow$ es gibt $n \geq 0$, so daß φ eine Σ_n-Formel ist.

  Δ_n maximal konsistente Menge von Σ_n-Formeln
$\Longrightarrow$ (vgl. Folie 4.23) $\varphi \in \Delta_n \subseteq \Delta^+$ oder $\neg\varphi \in \Delta_n \subseteq \Delta^+$
$\xRightarrow{\varphi \notin \Delta^+}$ $\neg\varphi \in \Delta^+ \subseteq \Gamma$

  Also $\varphi, \neg\varphi \in \Gamma$, im Widerspruch zur Konsistenz von Γ (vgl. Folie 4.23). $\square$

Satz

Sei Δ^+ maximal konsistente Menge von Σ^+-Formeln mit Konkretisierungen. Dann ist Δ^+ erfüllbar.

Beweisidee: Sei T die Menge der variablenlosen Σ^+-Terme. Auf T definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$s \sim t \iff \Delta^+ \vdash (s = t) \iff (s = t) \in \Delta^+$$

(vgl. Folie 4.22)
Sei $\mathcal{A}$ die folgende Σ^+-Struktur:

- $U_\mathcal{A} := T/\sim$ ist die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen
- $R^\mathcal{A} = \{([t_1], \ldots, [t_k]) \mid t_1, \ldots, t_k \in T, R(t_1, \ldots, t_k) \in \Delta^+\}$ für alle Relationssymbole R aus Σ^+
- $f^\mathcal{A}([t_1], \ldots, [t_k]) = [f(t_1, \ldots, t_k)]$ für alle $t_1, \ldots, t_k \in T$ und alle Funktionssymbole f aus Σ^+ (Bemerkung: dies ist wohldefiniert)

Dann gilt tatsächlich $\mathcal{A} \models \Delta^+$. □

Satz (Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik)

Sei Γ eine Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel. Dann gilt

$$\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi\,.$$

Insbesondere ist jede allgemeingültige Formel ein Theorem.

Beweis: indirekt

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma \nvdash \varphi & & \Gamma \not\models \varphi \\
\Updownarrow \text{(vgl. Folie 4.17)} & & \text{(vgl. Folie 5.7)} \Updownarrow \\
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent} & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(vgl. Folie 4.20)} & & \text{(klar)} \Uparrow \\
\exists\, \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ maximal konsistent} & & \Delta \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(Folie 9.19)} & & \text{(klar)} \Uparrow \\
\exists \Delta^+ \supseteq \Delta \text{ maximal konsistent mit Konkretisierungen} & \underset{\text{(Folie 9.23)}}{\Longrightarrow} & \Delta^+ \text{ erfüllbar}
\end{array}$$

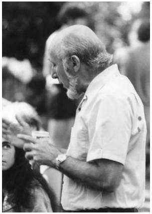
$\square$

Bemerkung

Dieser Satz ist (im wesentlichen) der berühmte Gödelsche Vollständigkeitssatz von 1930.

K. Gödel
(1906-1978)

Der obige Beweis wurde von Leon Henkin 1949 veröffentlicht.



L. Henkin
(1921-2006)

Wir haben gleichzeitig gezeigt:

Satz

Sei Γ höchstens abzählbar unendliche und konsistente Menge von Formeln. Dann hat Γ ein höchstens abzählbar unendliches Modell.

Beweis: Γ konsistent heißt $\Gamma \nvdash \perp$. Obiger Beweis gibt ein Modell $\mathcal{A}$ von $\Gamma \cup \{\neg\perp\}$ an. Wir zeigen, daß diese Struktur $\mathcal{A}$ höchstens abzählbar unendlich ist:

Sei Σ Signatur der Relations- und Funktionssymbole aus Γ.
$|\Gamma| \leq \aleph_0 \Longrightarrow |\Sigma| \leq \aleph_0$
$\Longrightarrow |\Sigma_n| \leq \aleph_0$ und $|\Delta_n| \leq \aleph_0$ für alle $n \geq 0$
$\Longrightarrow |\Sigma^+|, |\Delta^+| \leq \aleph_0$
$\Longrightarrow |T| \leq \aleph_0$
$\Longrightarrow \mathcal{A}$ hat $\leq \aleph_0$ viele Elemente
$\Longrightarrow \Gamma \cup \{\neg\perp\}$ hat ein höchstens abzählbar unendliches Modell
$\Longrightarrow \Gamma$ hat ein höchstens abzählbar unendliches Modell $\square$