SS 2021

Algorithmen und Datenstrukturen

4. Kapitel

Suchbäume

Martin Dietzfelbinger

Mai 2021

4.1 Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume **implementieren den Datentyp** **Wörterbuch**.

Zu diesem Datentyp gehören:

Schlüsselmenge U und Wertemenge R

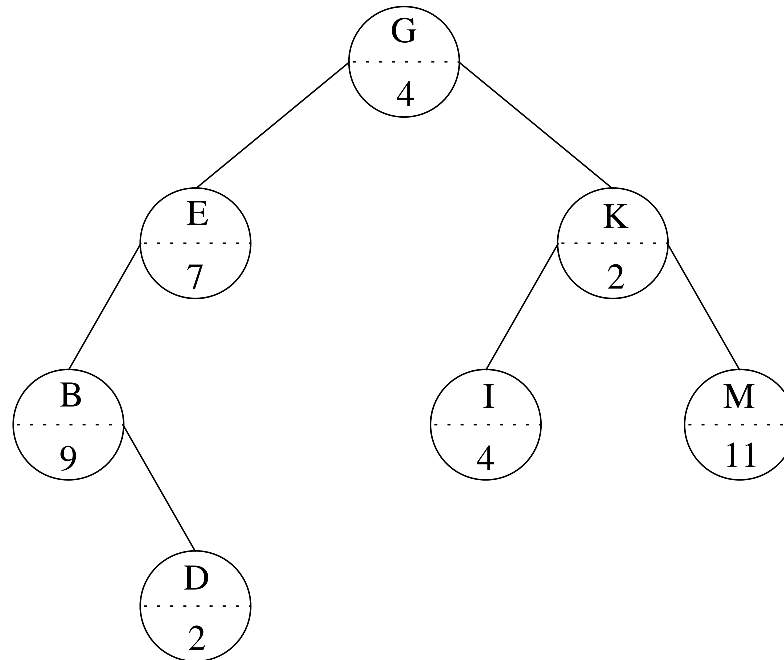
Wörterbuch: $f\colon S \to R$, wobei $S \subseteq U$ endlich.

- *empty*(): leeres Wörterbuch erzeugen
- *lookup*(f, x): falls $x \in S$: $f(x)$ ausgeben (sonst: „undefined“)
- *insert*(f, x, r): $f(x) := r$ setzen (für x neu in S, oder $f(x)$ auf r aktualisieren)
- *delete*(f, x): x aus $S = \mathrm{Def}(f)$ löschen, falls $x \in S$

Hier **zusätzlich** nötig: U ist durch $<$ **(total geordnet)**.

Beispiel: $U = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{Z}\}$ (Standardsortierung), $R = \mathbb{N}$.

Ein binärer Suchbaum T:



Dargestellte Funktion $f = f_T$:

$S = \mathrm{Def}(f) = \{\mathrm{B}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{G}, \mathrm{I}, \mathrm{K}, \mathrm{M}\}$, $f(\mathrm{B}) = 9$, $f(\mathrm{D}) = 2$, usw.

Binärer Suchbaum

Knoteneinträge (hier in inneren Knoten v):

- *key*(v): Schlüssel (aus U, mit $<$ Totalordnung auf U)
- *data*(v): Daten, Wert (aus R) (oft: Zeiger, Referenz)

Definition 4.1.1

Ein Binärbaum T mit Knoteneinträgen aus $U \times R$ heißt ein **binärer Suchbaum***, falls **für jeden Knoten** $\boldsymbol{v}$ in T gilt:

für alle Knoten w im **linken** Unterbaum von T_v: *key*$(w) <$ *key*(v)

für alle Knoten w im **rechten** Unterbaum von T_v: *key*$(v) <$ *key*(w)

---

engl.: *binary search tree*. Abk.: **(U, R)-BSB** oder **(U, R)-BST**

Alternative Definition: Rekursive Auffassung.

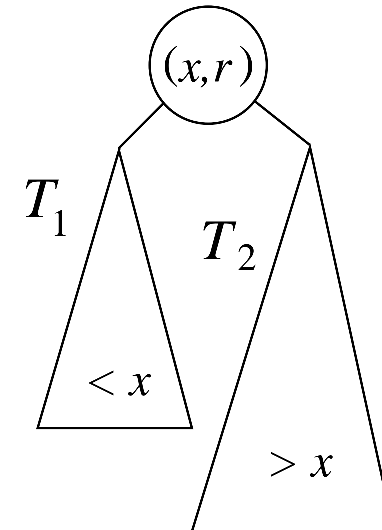
(i) $\square$ ist (U, R)-BSB, mit Schlüsselmenge $S = \emptyset$. $\square$

(ii) **Wenn** $x \in U$ und $r \in R$ **und**
T_1, T_2 sind (U, R)-BSB
mit Schlüsselmengen S_1 bzw. $S_2 \subseteq U$,

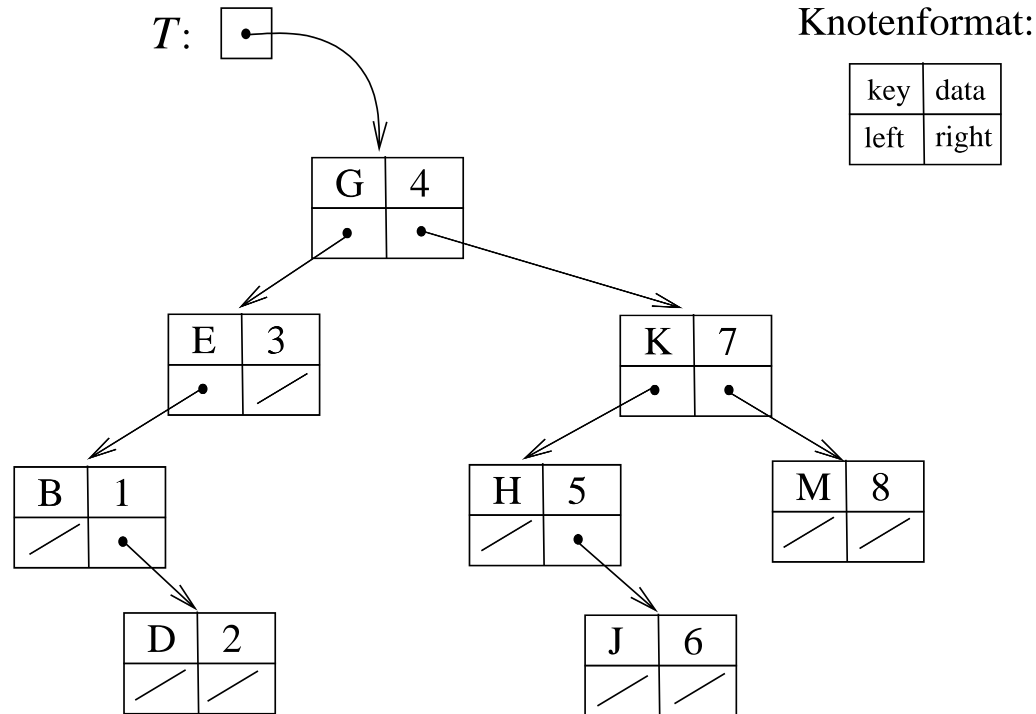
und wenn $y < x$ für alle $y \in S_1$
und $x < z$ für alle $z \in S_2$,

dann ist $(T_1, (x, r), T_2)$ ein (U, R)-BSB
mit Schlüsselmenge $S_1 \cup \{x\} \cup S_2$.

[(iii) Nichts sonst ist ein (U, R)-BSB.]



Falls (ii): *key*$(T) := x$ und *data*$(T) := r$.



Implementierung von binären Suchbäumen: Verzeigerte Struktur.

Knotenobjekt hat Komponenten (Attribute) für Schlüssel, Daten und Referenzen/ Zeiger auf linkes und rechtes Kind: $T.\mathit{key}$, $T.\mathit{data}$, $T.\mathit{left}(\mathit{child})$, $T.\mathit{right}(\mathit{child})$

Baum ist gegeben durch Zeiger/Referenz auf Wurzel.

Suchen, rekursiv

lookup(T, x), für BSB T, $x \in U$.

// Ergebnis: r, wenn (x, r) im Baum T vorhanden
// „nicht vorhanden", wenn es kein solches Paar gibt.

1. Fall: $T = \square$: **return** „nicht vorhanden"

// Ab hier: $T \neq \square$, also $T = (T_1, (y, r), T_2)$.

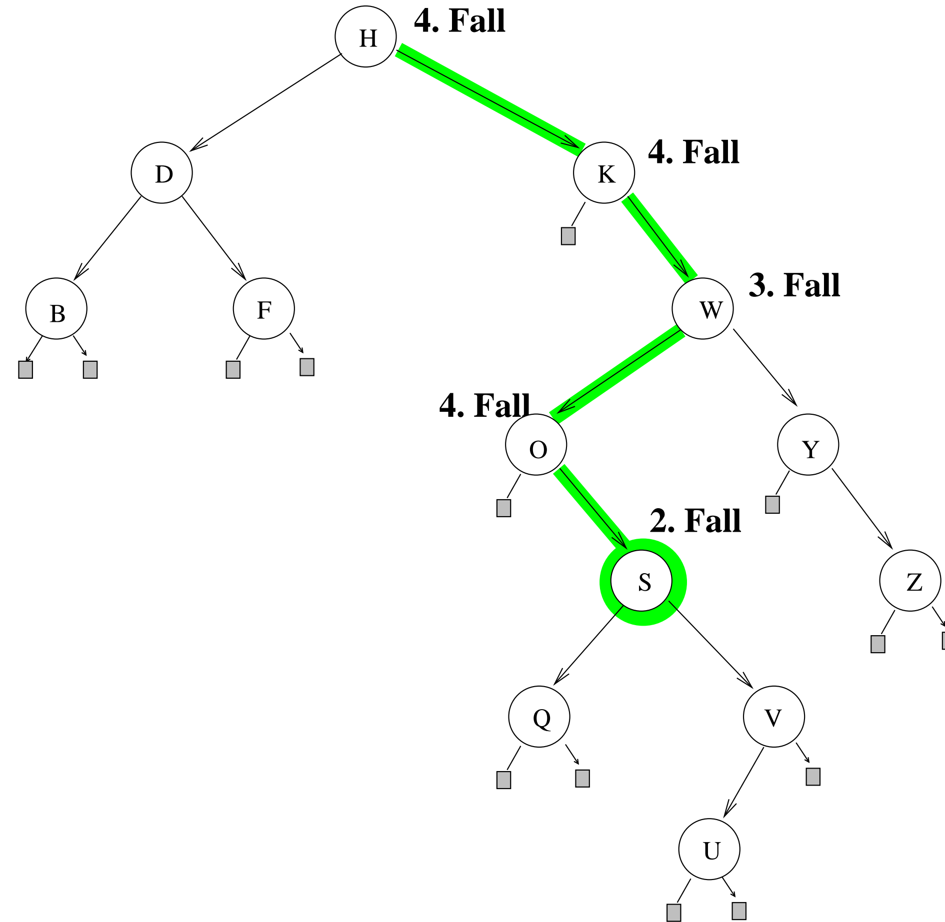
2. Fall: $x = y$: **return** r.

3. Fall: $x < y$: **return lookup**$(T.\textit{left}, x)$ // rekursiver Aufruf.

4. Fall: $x > y$: **return lookup**$(T.\textit{right}, x)$ // rekursiver Aufruf.

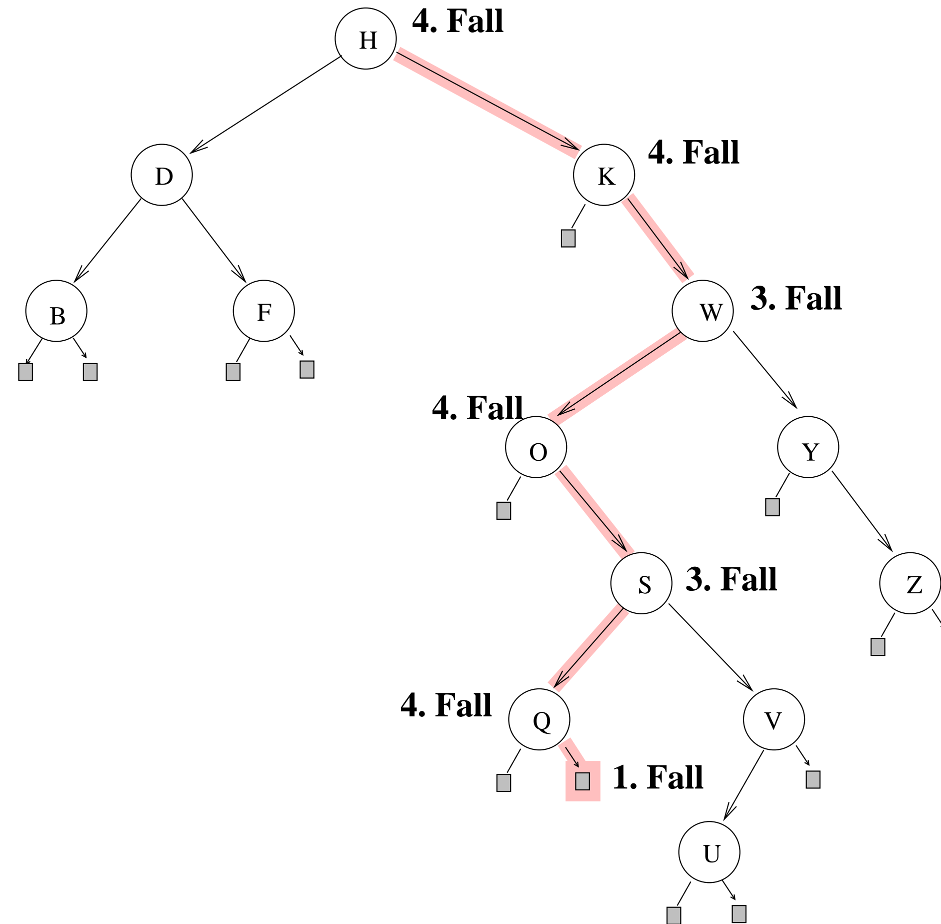
(**Beachte** die einfache Programmstruktur, die sich an rekursiver Definition von BSBen orientiert!)

Beispiel:



Suche: $\mathrm{S} \in S$.

Beispiel:



Suche: $\mathrm{R} \notin S$.

Korrektheit: Für BSB T definieren wir $f_T(x) := r$, wenn es in T einen Knoten v mit $v.\mathit{key} = x$ und $v.\mathit{data} = r$ gibt; wenn es keinen Knoten v mit $v.\mathit{key} = x$ gibt, ist $x \notin \mathrm{Def}(f_T)$. D. h.: f_T ist die von T dargestellte Funktion. Per Induktion über den Aufbau von Binärbäumen zeigt man: Die Ausgabe von **lookup**(T, x) ist $f_T(x)$.

(Später gezeigt: **insert** und **delete** verändern f_T wie vom mathematischen Modell vorgeschrieben.)

Zeitaufwand: Wenn x in Knoten v_x sitzt:
Für jeden Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu v_x Kosten $O(1)$. Also:

$$\text{Kosten}^* \quad O(d(v_x)) = O(d(T)).$$

Wenn x in T nicht vorkommt: Suche endet in externem Knoten l_x. Kosten $O(1)$ für jeden Knoten auf dem Weg. Also:

$$\text{Kosten } O(d(l_x)) = O(d(T)).$$

* Lies (überall) $O(1 + d(v_x)) = O(1 + d(T))$ usw. – **Übung:** Suche **iterativ** programmieren.

Einfügen, **rekursiv**

insert(T, x, r), für BSB T, $x \in U, r \in R$.

// Ergebnis: Baum T' mit $f_{T'} = \mathit{insert}(f_T, x, r)$.

1. Fall: $T = \square$: Erzeuge neuen (Wurzel-)Knoten v mit Eintrag (x, r);
$T \leftarrow v$; **return** T.

// Ab hier: $T \neq \square$, also $T = (T_1, (y, r'), T_2)$.

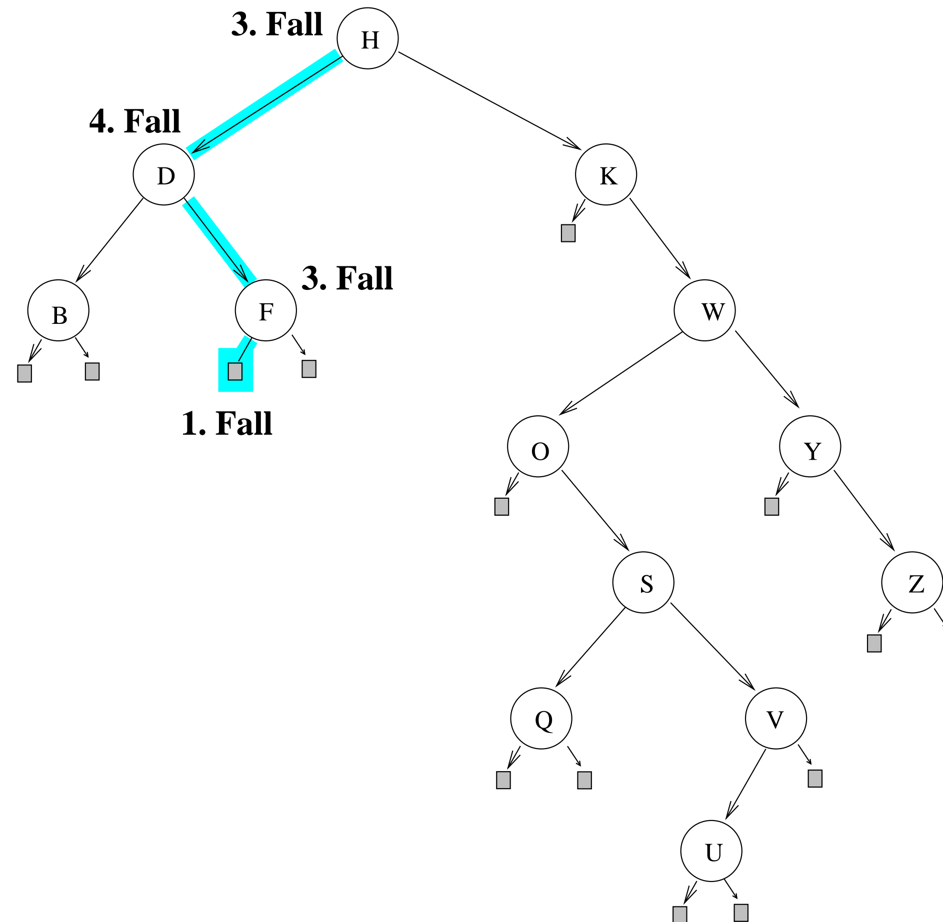
2. Fall: $x = y$: $T.\mathit{data} \leftarrow r$; **return** T. // **Update-Situation!**

3. Fall: $x < y$: $T.\mathit{left} \leftarrow$ **insert**$(T.\mathit{left}, x, r)$; **return** T.

4. Fall: $y < x$: $T.\mathit{right} \leftarrow$ **insert**$(T.\mathit{right}, x, r)$; **return** T.

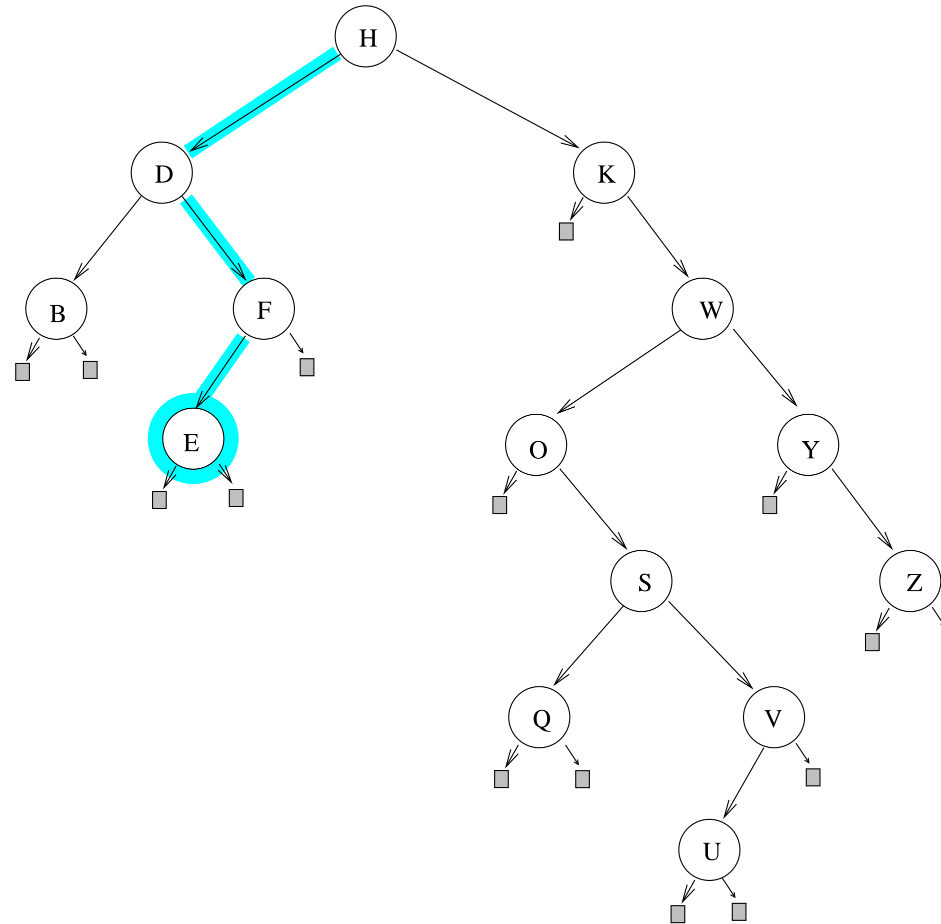
Beachte im 3. und im 4. Fall, dass implizit der Unterbaum „abgehängt“ und der Behandlung durch den rekursiven Aufruf übergeben wird. Durch den rekursiven Aufruf kann sich die Wurzel des Unterbaums verändern (oder aus einem `null`-Zeiger ein Zeiger auf einen echten Knoten werden). Der veränderte Unterbaum wird wieder an die richtige Stelle angehängt.

Beispiel:



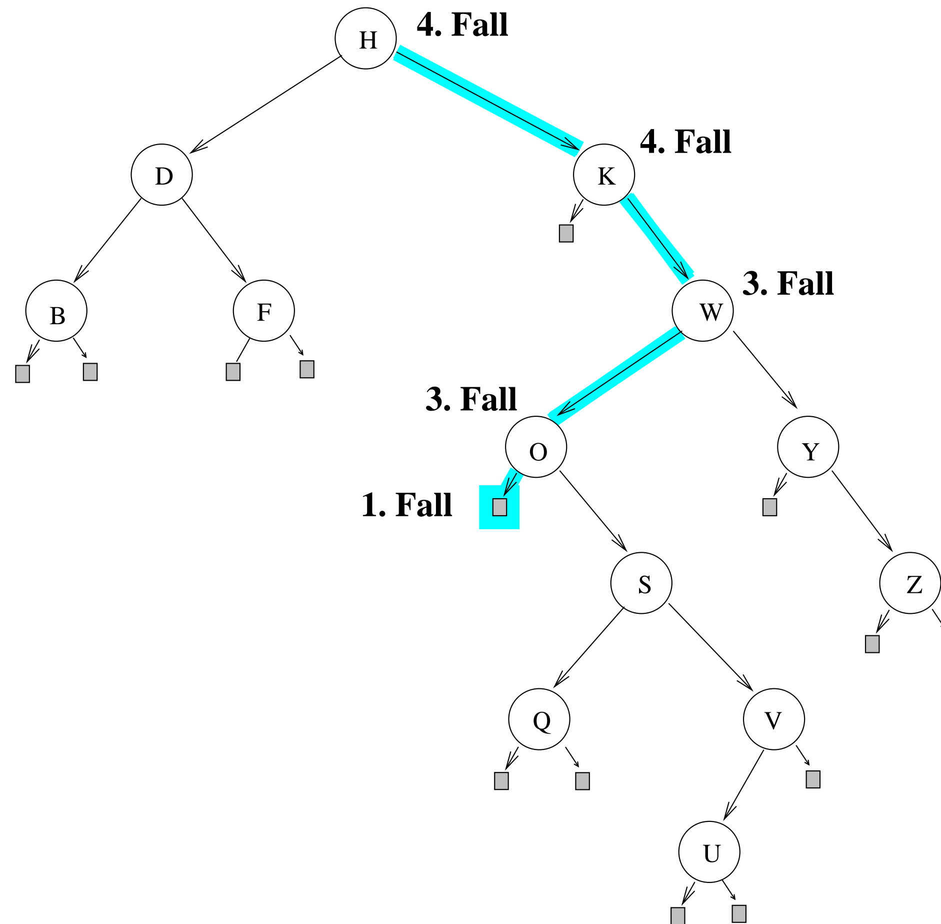
Füge ein: $\mathrm{E} \notin S$.

Beispiel:



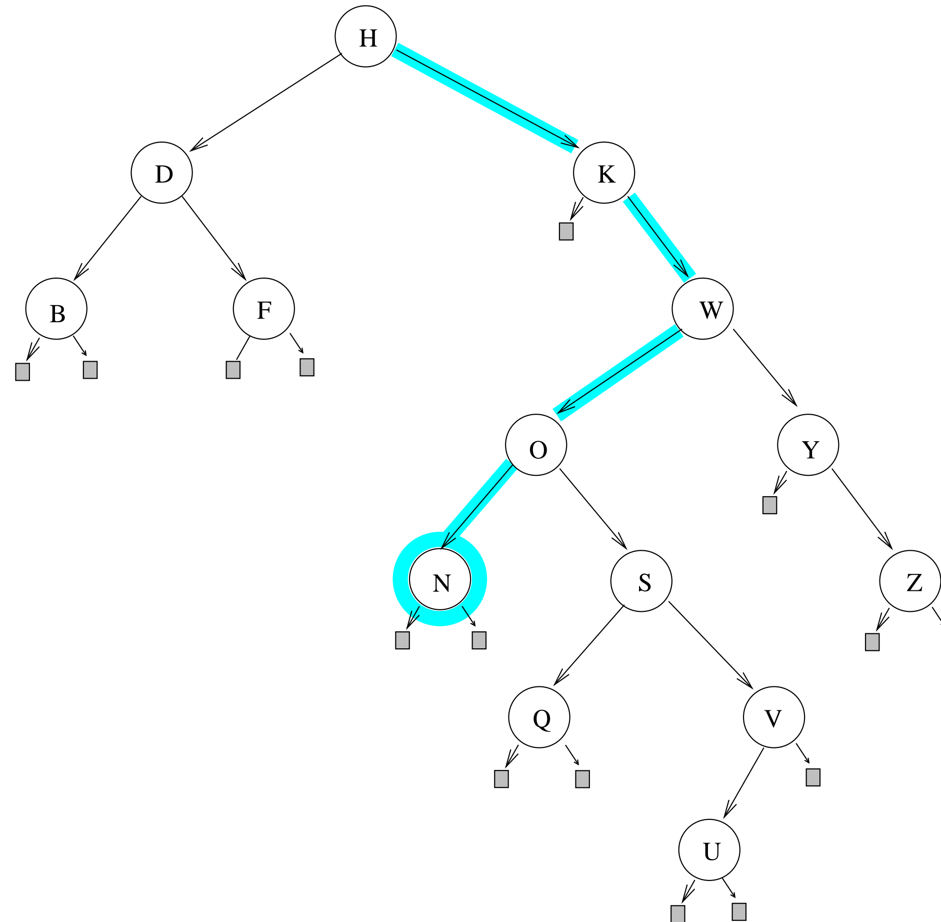
Füge ein: $\mathrm{E} \notin S$.

Beispiel:



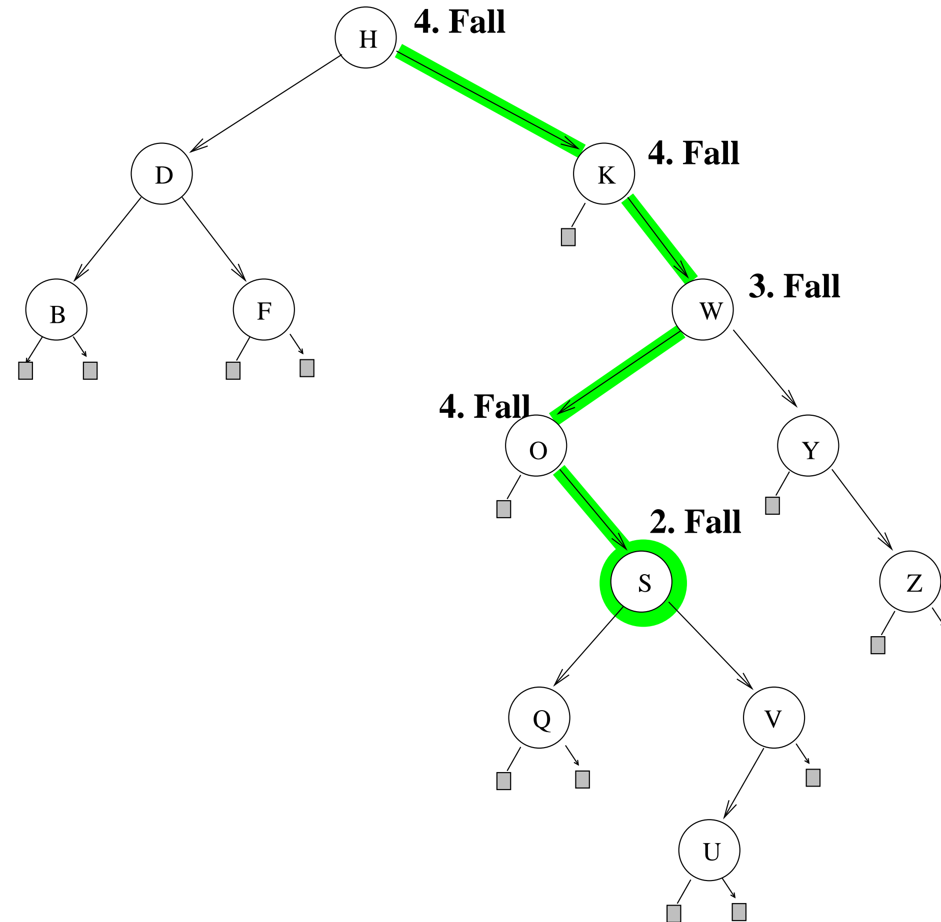
Füge ein: $\mathrm{N} \notin S$.

Beispiel:



Füge ein: $\mathrm{N} \notin S$.

Beispiel:



Füge ein: $\mathrm{S} \in S$.

Korrektheit:

Behauptung: Aufruf **insert**(T, x, r) erzeugt einen binären Suchbaum T', der das modifizierte Wörterbuch *insert*(f_T, x, r) darstellt. (f_T: die von T dargestellte Funktion.)

Beweis: Induktion über den Aufbau von Binärbäumen. (Siehe Druckfolien.)

Zeitaufwand: Wenn x im Knoten v_x schon vorhanden:

$$\boxed{\text{Kosten } O(d(v_x)) = O(d(T)).}$$

Wenn x nicht in T: $O(1)$ für jeden Knoten auf dem Weg von Wurzel zu l_x. Also:

$$\boxed{\text{Kosten } O(d(l_x)) \ = O(d(T)).}$$

Übung: Einfügung **iterativ** programmieren. *Hinweis*: Man muss immer auch den Vorgänger des aktuellen Unterbaums kennen.

(Für Interessierte.)

Beweis der Behauptung „Aufruf **insert**(T, x, r) erzeugt einen BST T', der *insert*(f_T, x, r) darstellt.“ durch **Induktion über den rekursiven Aufbau** von T.

(i) Wenn $T = \square$, dann ist f_T die leere Funktion. Der Algorithmus landet im 1. Fall. Es wird ein neuer Knoten v mit Eintrag (x, r) erzeugt und als T' zurückgegeben. Offenbar stellt dieser Baum dir Funktion *insert*$(f_T, x, r) = \{(x, r)\}$ dar.

(ii) Wenn $T = (T_1, (y, r'), T_2)$, gibt es mehrere Fälle.

2. Fall: $x = y$. Dann sieht T' genauso aus wie T, nur dass in der Wurzel der Wert r' durch r ersetzt wurde. Daher ist T' offenbar ein BSB und stellt *insert*(f_T, x, r) dar.
3. Fall: $x < y$. Dann erhält man T', indem man T_1 durch $T_1' =$ **insert**(T_1, x, r) ersetzt. Nach I.V. (kleinerer Baum!) ist T_1' ein BSB, und $T' = (T_1', (y, r'), T_2)$. Ist T' ein BSB? Unterbaum T_2 ist unverändert, also $> y$, in T_1' kommt eventuell Schlüssel $x < y$ hinzu. Also ist die Schlüsselanordnung korrekt. Stellt T' die Funktion *insert*(f_T, x, r) dar? In der Wurzel und in T_2 ist alles beim Alten. Durch T_1' wird nach I.V. $f_1' =$ *insert*(f_{T_1}, x, r) dargestellt. Egal ob nun (x, r) ein neues Paar ist oder im linken Unterbaum nur ein Update erfolgte, die Funktion f_1' zusammen mit (y, r') (Wurzel) und f_{T_2} bildet *insert*(f_T, x, r).
4. Fall: $y < x$: Wie 3. Fall. $\square$

Löschen, rekursiv

delete(T, x), für BSB T, $x \in U$.

// Ergebnis: Baum T' mit $f_{T'} = \mathit{delete}(f_T, x)$.

1. Fall: $T = \square$: **return** T. // Nichts zu tun (x nicht vorhanden)

// Ab hier: $T \neq \square$, also $T = (T_1, (y, r), T_2)$.

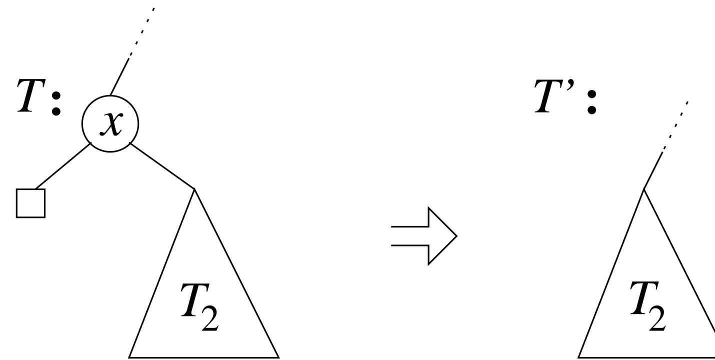
2. Fall: $x < y$: $T.\mathit{left} \leftarrow$ **delete**$(T.\mathit{left}, x)$; **return** T;

3. Fall: $y < x$: $T.\mathit{right} \leftarrow$ **delete**$(T.\mathit{right}, x)$; **return** T;

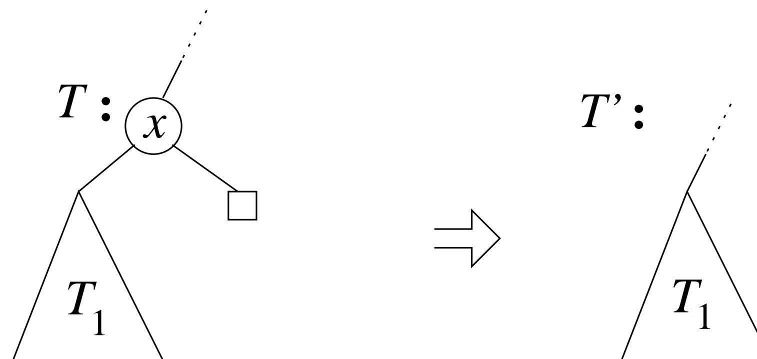
4. Fall: $x = y$: **Lösche Wurzel** von T (Unterfälle **4a–4c**, s. u.).

Lösche Wurzel von $T = (T_1, (x, r), T_2)$!

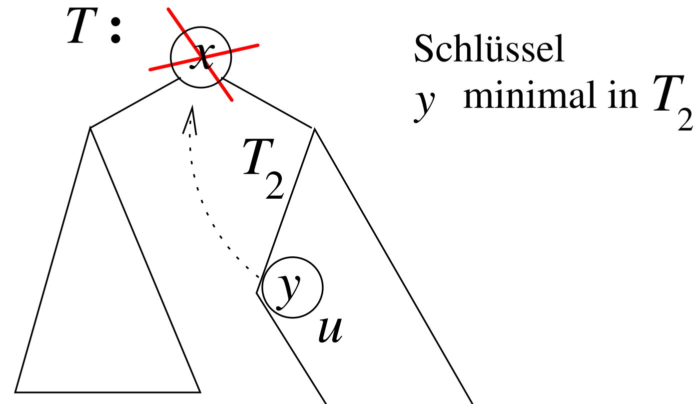
Fall 4a: $T.left = \square$: **return** $T.right$ (auch wenn $T.right = \square$ ist!)



Fall 4b: $T.right = \square$: **return** $T.left$



Fall 4c: $T.\mathit{left} \neq \Box$ und $T.\mathit{right} \neq \Box$.



Suche in T_2 Eintrag (y, r') mit minimalem Schlüssel y, in Knoten u.

(Dies ist der **Inorder-Nachfolger** der Wurzel von T.)

$T_2' := T_2$ nach Entfernen von Knoten u; // siehe unten **ExtractMin**

$u.\mathit{left} \leftarrow T.\mathit{left}$; $u.\mathit{right} \leftarrow T_2'$; **return** u.

(Zeiger/Referenzen umhängen, nicht Daten/Schlüssel kopieren!)

Extrahieren des Minimums, rekursiv

extractMin(T) // zieht aus einem (nichtleeren) BSB $T = (T_1, (z, r), T_2)$
den Knoten u mit dem kleinsten Schlüssel heraus.

Dies ist ebenfalls rekursiv zu realisieren.

Resultat: Kleinerer Baum T' und ein separater Baumknoten u (via Zeiger auf u).

Fall „leer“: T.*left* $= \square$. // Schlüssel z in der Wurzel ist minimal in T.

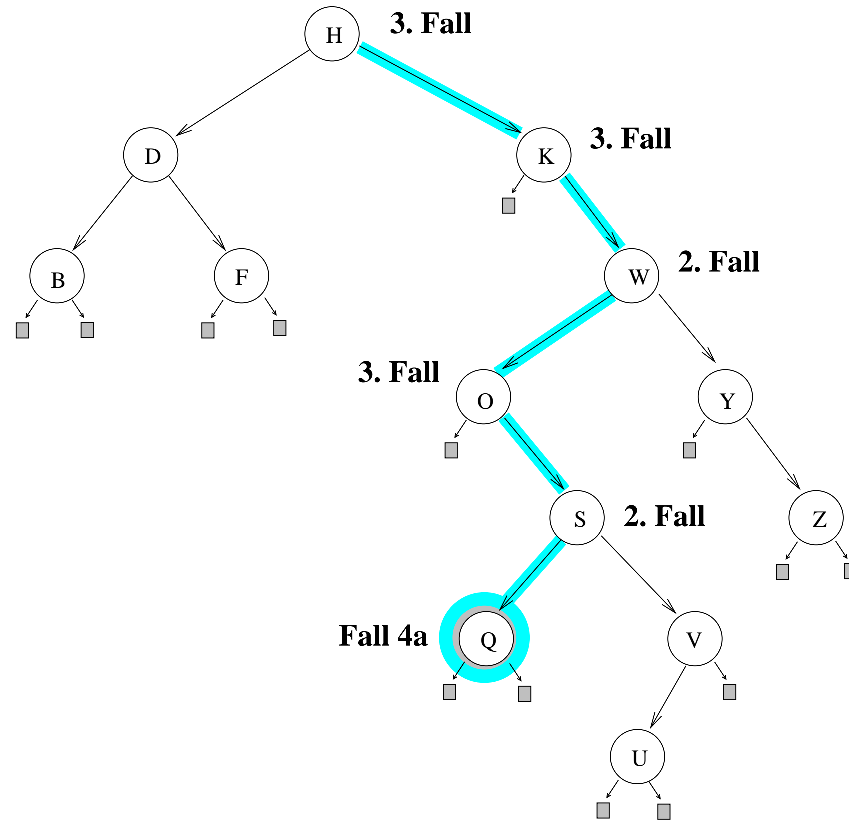
$T' \leftarrow T$.*right*; T.*right* $\leftarrow \square$; $u \leftarrow T$; **return**(T', u) // Knoten u war Wurzel.

Fall „nichtleer“: T.*left* $\neq \square$.

$(T', u) \leftarrow$ **extractMin**$(T$.*left*$)$; T.*left* $\leftarrow T'$; **return**(T, u).

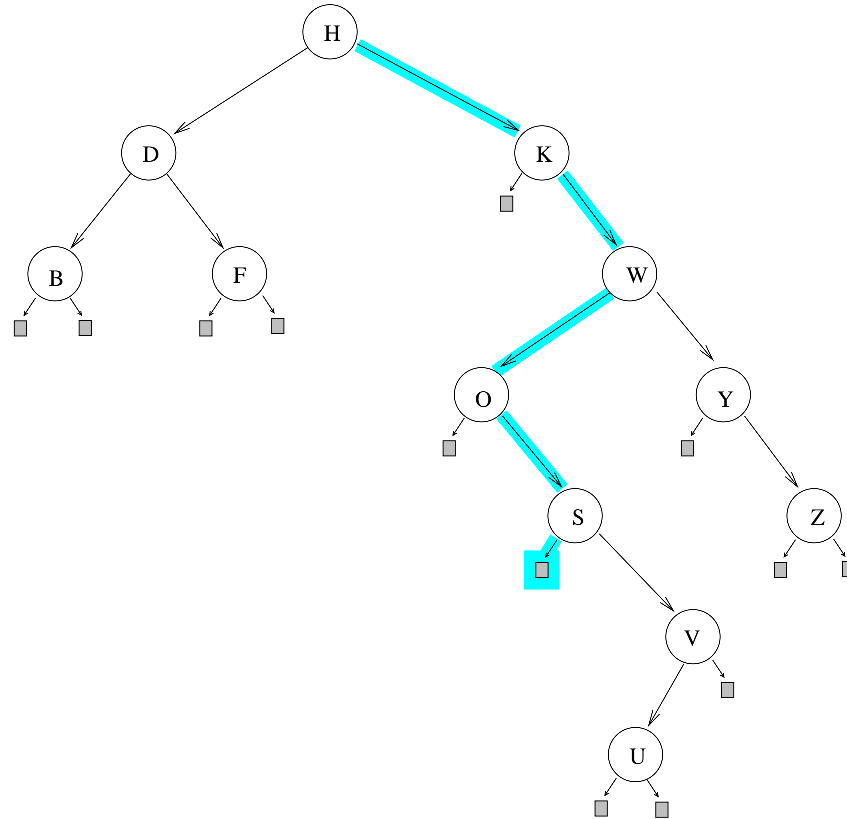
Anschaulich, iterativ: Starte in der Wurzel von T. Laufe den „Weg der linken Kinder“ hinab, bis ein Knoten u erreicht ist, der kein linkes Kind hat. Knoten u enthält den kleinsten Schlüssel in T. Lenke Zeiger auf u auf den rechten Unterbaum von u um, und gib den so modifizierten Baum und u zurück.

Beispiel:



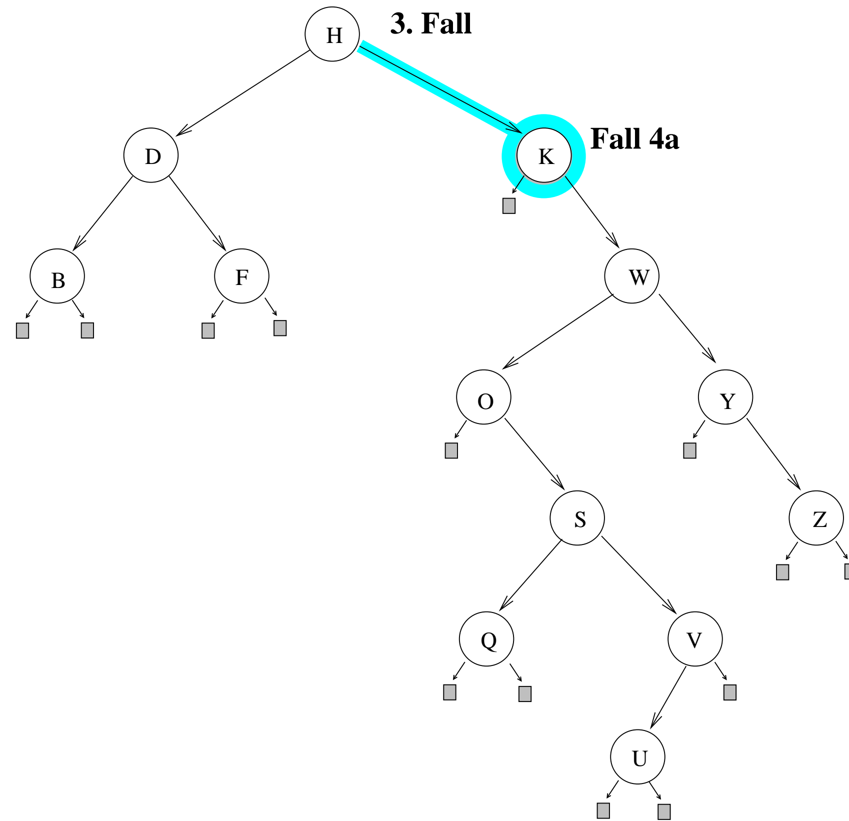
Lösche: Q.

Beispiel:



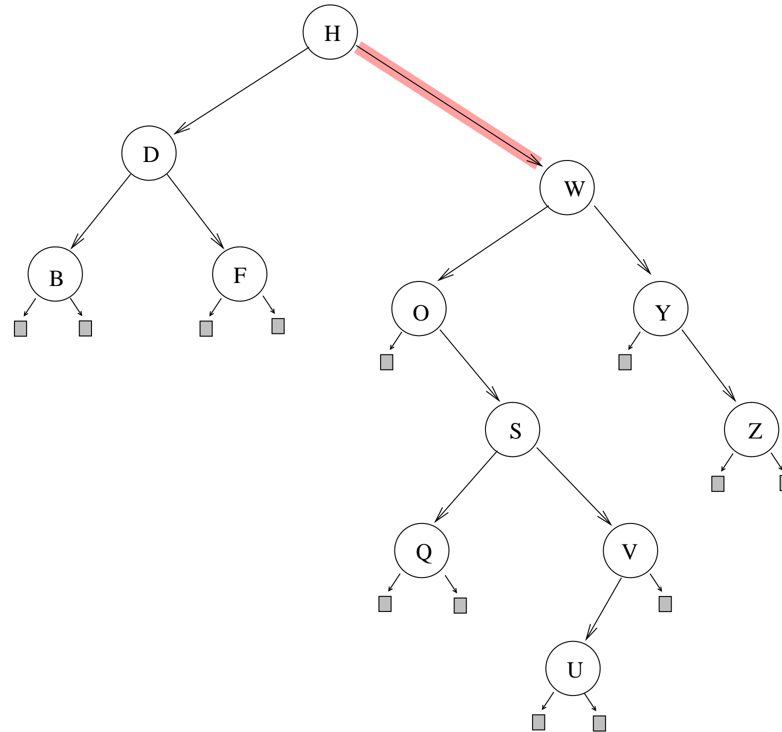
Lösche: Q.

Beispiel:



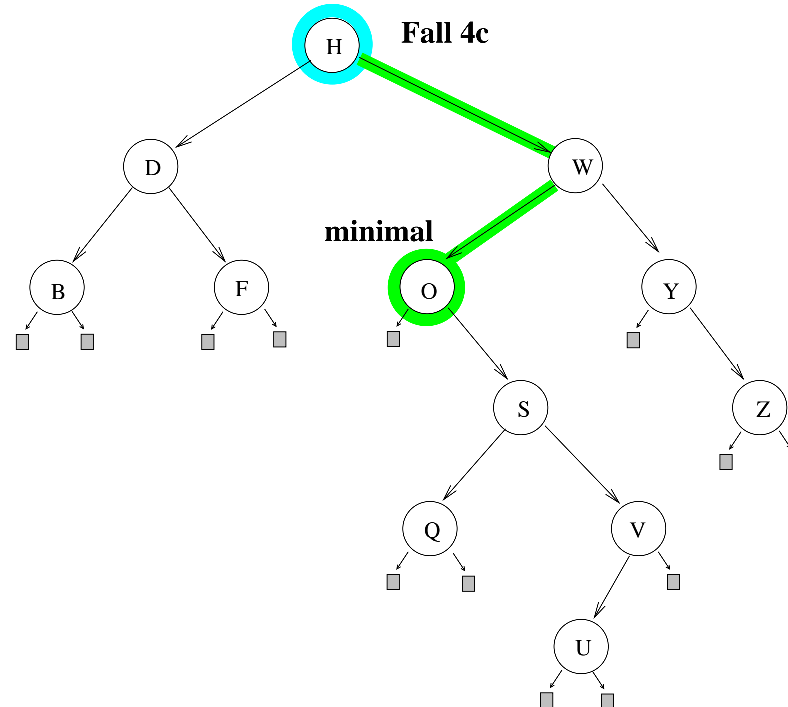
Lösche: K.

Beispiel:



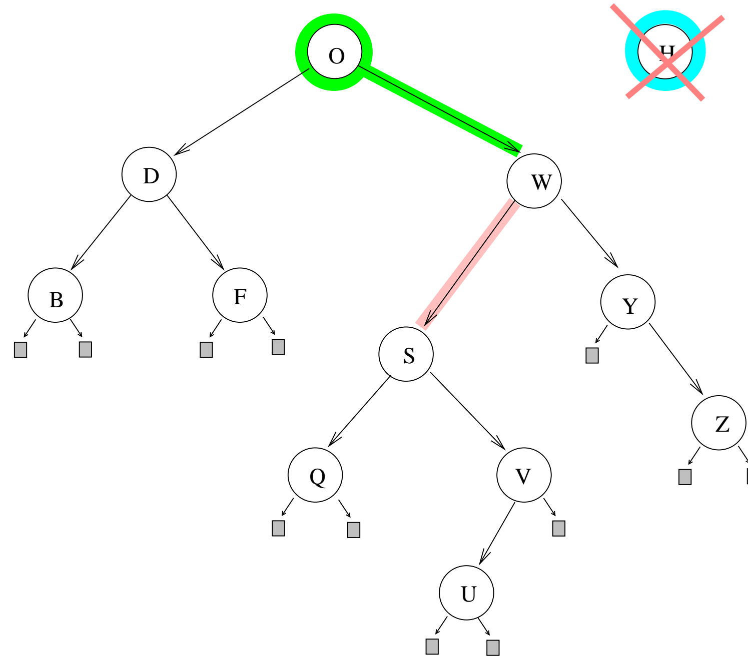
Lösche: K.

Beispiel:



Lösche: H.

Beispiel:



Lösche: H.

Intuitive, **iterative** Beschreibung des Löschvorgangs:
Suche Schlüssel x in T. Falls nicht gefunden, ist nichts zu tun. Falls x in Knoten v, drei Fälle:

a) v hat leeren linken Unterbaum.
„Biege Zeiger vom Vorgänger von v zu v auf den rechten Unterbaum von v um."
(**Achtung!** Der Fall, dass v Blatt ist, ist hier inbegriffen.)

b) v hat leeren rechten Unterbaum.
„Biege Zeiger vom Vorgänger von v zu v auf den linken Unterbaum von v um."

c) Beide Unterbäume von v sind nicht leer.
Suche **Inorder-Nachfolger** u von v, d. h. den Knoten mit kleinstem Schlüssel im rechten Unterbaum von v. (Gehe zum rechten Kind von v und dann „immer links", bis Knoten u erreicht, der kein linkes Kind hat.) **Der linke Unterbaum von u ist immer leer!**
Lenke den Zeiger vom Vorgänger von u auf den rechten Unterbaum von u um, behalte u als einzelnen Knoten.
Ersetze in T den Knoten v durch u (Zeiger zu den Kindern kopieren, Zeiger auf v nach u umlenken).

Übung:
Löschung **iterativ** programmieren. *Hinweis*: Erst v mit $v.key = x$ finden, aber man benötigt auch den Vorgänger von v. Im Fall c): u finden, aber man benötigt auch den Vorgänger von u.

Korrektheit:

Behauptung: Aufruf **delete**(T, x) erzeugt einen binären Suchbaum für das modifizierte Wörterbuch *delete*(f_T, x).

Beweis: Induktion über den Aufbau von Binärbäumen.

Dabei muss man gesondert beweisen, und dann benutzen, dass die Prozedur **extractMin**(T), angewendet auf einen nichtleeren BSB, das verlangte Resultat liefert.

Zeitaufwand:

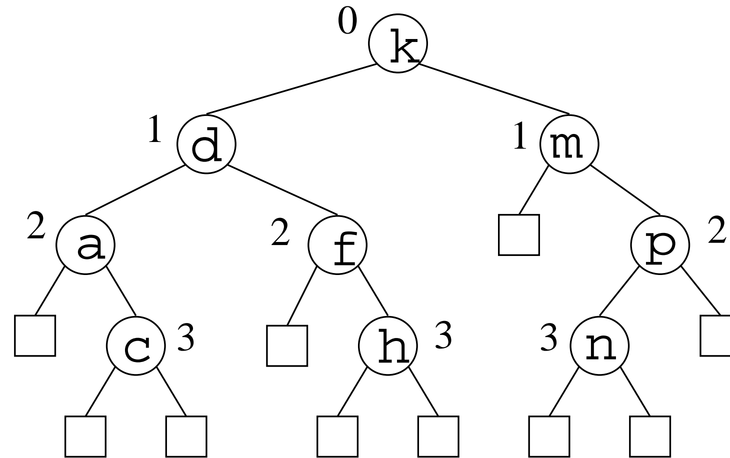
- x im Knoten v_x, Fälle 2/3: $O(d(v_x)) = O(d(T))$.
- x im Knoten v_x, Fall 4:
  $O(d(v_x^+)) = O(d(T))$, für Inorder-Nachfolger v_x^+ von v_x.
- x in T nicht vorhanden:
  $O(d(l_x)) \ = O(d(T))$, für externen Knoten l_x.

Vorlesungsvideo:

Erwartete mittlere Tiefe in zufälligen BSBs

4.2 Erwartete mittlere Tiefe in zufälligen BSBs

Schon gesehen:
Summe der Knotentiefen.



Totale innere Weglänge TIPL$(T) = \sum_{v \in V} d(v) (= 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 17)$.

Mittlere innere Weglänge: $\frac{1}{n}$TIPL(T) (hier: $\frac{17}{9}$).

Totale Anzahl von durchlaufenen Knoten, wenn man zu jedem einmal hinläuft: $n +$ TIPL(T).

Mittelwert $1 + \frac{1}{n}$TIPL(T): erwartete Kosten, wenn jeder Schlüssel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ gesucht wird.

Zufällig erzeugte binäre Suchbäume

T **„zufällig erzeugt“**: Gegeben: $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq U$ mit $x_1 < \cdots < x_n$.

Starte mit leerem Baum, füge Schlüssel aus S nacheinander ein. Dabei:

Eingabereihenfolge der Schlüssel ist „rein zufällig“, d. h. für jede Permutation π hat die Reihenfolge $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}$ Wahrscheinlichkeit $1/n!$. Definiere:

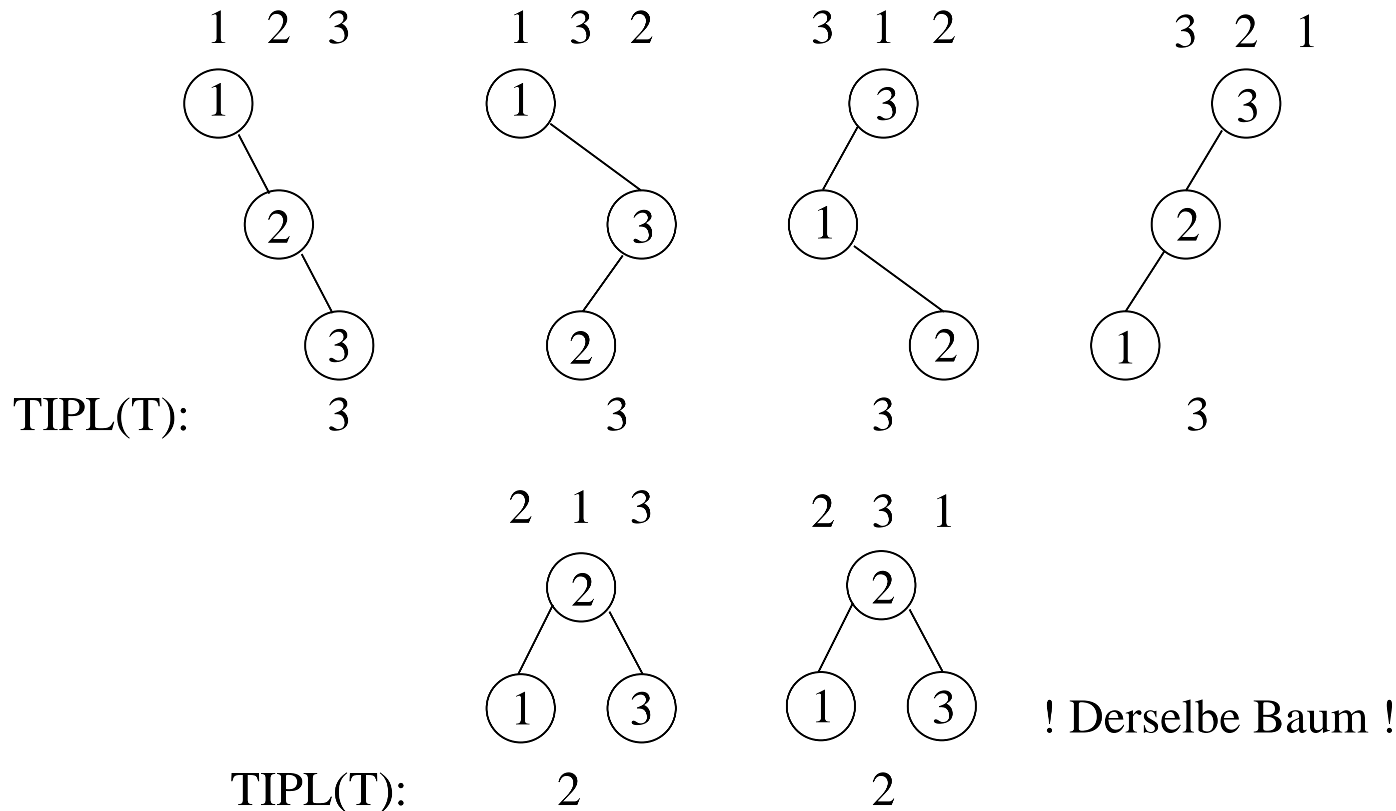
$$\boldsymbol{A(n)} := \mathbf{E}(\mathsf{TIPL}(T)) \quad \text{(Erwartungswert).}$$

Dann ist der **erwartete** (über **Eingabereihenfolge zufällig**) **mittlere** (**über n Schlüssel $x \in S$** **gemittelte**) Aufwand für **lookup**(x):

$$\mathbf{E}\left(O\left(1 + \frac{1}{n}\mathsf{TIPL}(T)\right)\right) = O\left(1 + \frac{1}{n}A(n)\right).$$

Was ist $A(n)$? $\quad A(0) = 0,\ \ A(1) = 0,\ \ A(2) = 1,\ \ldots$

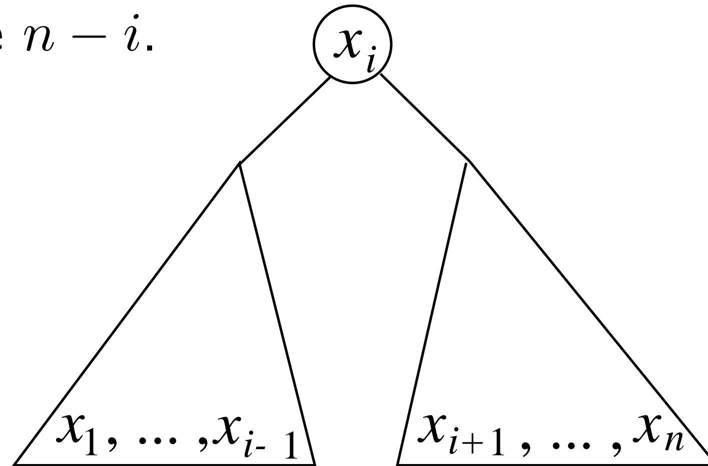
$A(3) = ?$ – 6 Einfügereihenfolgen für $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$:



$$A(3) = \mathbf{E}(\mathrm{TIPL}(T)) = \frac{1}{6}(3+3+3+3+2+2) = \frac{8}{3}.$$

Rekursionsformel

Wenn x_i der erste eingefügte Schlüssel ist, dann hat der linke Unterbaum von T genau $i-1$ Schlüssel, der rechte $n-i$.



Die Unterbäume sind selbst zufällig erzeugte binäre Suchbäume. Also:

$$\mathbf{E}(\mathrm{TIPL}(T) \mid \text{falls } x_i \text{ erster}) = \ldots = ((i-1) + A(i-1)) + ((n-i) + A(n-i)).$$

Begründung: Der Weg in T zu jedem der $n-1$ Knoten in den Teilbäumen ist um 1 länger als der Weg im Teilbaum; daher die Summanden $(i-1)$, $(n-i)$.

Was wir hatten, etwas vereinfacht:

$$\mathbf{E}(\text{TIPL}(T) \mid \textbf{falls } x_i \text{ erster}) = n - 1 + A(i-1) + A(n-i).$$

Jeder der n Schlüssel $x_1, \ldots, x_n$ hat dieselbe Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$, als erster eingefügt zu werden und die Wurzel zu bilden. Mittelung liefert den E.-wert:

$$A(n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1 \le i \le n} (n - 1 + A(i-1) + A(n-i)).$$

Das heißt:

$$A(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{1 \le i \le n} (A(i-1) + A(n-i)) = n - 1 + \frac{2}{n} \cdot \sum_{0 \le j \le n-1} A(j).$$

(Begründung: $i-1$ durchläuft $j = 0, 1, \ldots, n-1$; $n-i$ durchläuft $j = n-1, \ldots, 1, 0$.)

Wir haben also die folgende Rekurrenz**gleichung**:

$$A(0) = 0 \quad \text{und} \quad A(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \cdot \sum_{1 \le j \le n-1} A(j) \text{ für } n \ge 1.$$

Damit können wir nacheinander Werte berechnen:

$$\begin{aligned}
A(1) &= 0 + \tfrac{2}{1} \cdot \textstyle\sum_{1 \le j \le 0} A(j) &&= 0;\\
A(2) &= 1 + \tfrac{2}{2} \cdot (0) &&= 1;\\
A(3) &= 2 + \tfrac{2}{3} \cdot (0 + 1) &&= \tfrac{8}{3};\\
A(4) &= 3 + \tfrac{2}{4} \cdot (0 + 1 + \tfrac{8}{3}) &&= \tfrac{29}{6};\\
A(5) &= 4 + \tfrac{2}{5} \cdot (0 + 1 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{29}{6}) &&= \tfrac{37}{5}; \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Finden wir eventuell eine geschlossene Form?

$$A(n) = (n-1) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{1 \le j \le n-1} A(j)$$

Multiplizieren mit n:

$$nA(n) = n(n-1) + 2 \cdot \sum_{1 \le j \le n-1} A(j)$$

Dasselbe für $n-1$:

$$(n-1)A(n-1) = (n-1)(n-2) + 2 \cdot \sum_{1 \le j \le n-2} A(j)$$

Subtrahieren (dieser Trick eliminiert die Summe!):

$$\begin{aligned} nA(n) - (n-1)A(n-1) &= n(n-1) - (n-1)(n-2) + 2A(n-1) \\ &= 2(n-1) + 2A(n-1). \end{aligned}$$

Wir haben: $nA(n) - (n-1)A(n-1) = 2A(n-1) + 2(n-1)$, d. h.

$$nA(n) - (n+1)A(n-1) = 2(n-1). \qquad \Big| : n(n+1)$$

$$\frac{A(n)}{n+1} - \frac{A(n-1)}{n} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}.$$

Mit der Abkürzung $Z(n) := A(n)/(n+1)$ gilt

$$Z(0) = 0 \quad \text{und} \quad Z(n) - Z(n-1) = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}, \text{ für } n \geq 1.$$

Also, für $n \geq 0$:

$$Z(n) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{2(j-1)}{j(j+1)} = \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{2}{j} - \frac{4}{j(j+1)} \right).$$

Wir haben:

$$Z(n) = 2 \sum_{1 \le j \le n} \frac{1}{j} - 4 \sum_{1 \le j \le n} \frac{1}{j(j+1)}.$$

Mit $\boldsymbol{H_n} := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ **(n-te harmonische Zahl)** und $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}$ ergibt das:

$$Z(n) = 2H_n - \frac{4n}{n+1}.$$

Mit $A(n) = Z(n) \cdot (n+1)$ erhalten wir die „geschlossene Form“

$$A(n) = 2(n+1)H_n - 4n.$$

Erwartete mittlere Knotentiefe (Einfügereihenfolge **zufällig**; **Mittelung** über $x_1, \ldots, x_n$):

$$\boxed{A(n)/n = 2H_n - 4 + O(\tfrac{H_n}{n}).}$$

Was ist H_n? Für jedes $i \geq 2$:

$$\frac{1}{i} < \int_{i-1}^{i} \frac{dt}{t} .$$

Für jedes $i \geq 1$:

$$\int_{i}^{i+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{i} .$$

Daraus:

$$H_n - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} = \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} < H_n.$$

Also: $\boxed{\ln n < H_n < 1 + \ln n, \text{ für } n \geq 2.}$

Genauer (ohne Bew.): $(H_n - \ln n) \nearrow \gamma$, für $n \to \infty$, wobei $\gamma = 0{,}57721\ldots$ („Euler-Konstante“).

Hatten schon:

$$\frac{1}{n}A(n) = 2H_n - 4 + O(\tfrac{H_n}{n}).$$

Eben gesehen: $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma \approx 0{,}57721.$

Satz 4.2.1

$$\boxed{\frac{1}{n}A(n) = 2\ln n - (4 - 2\gamma) + o(1)}$$

Wenn man Zweierlogarithmen bevorzugt:

$$\frac{1}{n}A(n) = (\mathbf{2\ln 2})\log n - 2{,}846\ldots + o(1),\ \text{mit } 2\ln 2 = \mathbf{1{,}386\ldots}.$$

Satz 4.2.1 (Kurzform) In zufällig erzeugten binären Suchbäumen ist die **erwartete mittlere** Knotentiefe etwa $1{,}39\log n$.

Mitteilungen:

Erwartete **Baumtiefe** $d(T)$ für zufällig erzeugtes T ist ebenfalls $O(\log n)$, genauer: $\mathbf{E}(d(T)) \leq 3\log n + O(1/n)$.

Leider ist sehr oft die **Einfügereihenfolge nicht zufällig**.

Ungünstig: Daten perfekt oder partiell sortiert. (Und das ist nicht ungewöhnlich.)

Zudem: Häufiges Löschen mit **extractMin** zerstört die Balance, mittlere Suchzeit wird $\Omega(\sqrt{n})$.

Abhilfe hierfür: Bei Löschungen von Knoten mit nichtleeren Unterbäumen **abwechselnd kleinsten Schlüssel aus rechtem Unterbaum und größten Schlüssel aus linkem Unterbaum** entnehmen.

Rest dieses Kapitels: **Balancierte** Suchbäume. (Erzwingen logarithmische Tiefe.)

Vorlesungsvideo:

AVL-Bäume (Einführung)

4.3 Balancierte binäre Suchbäume

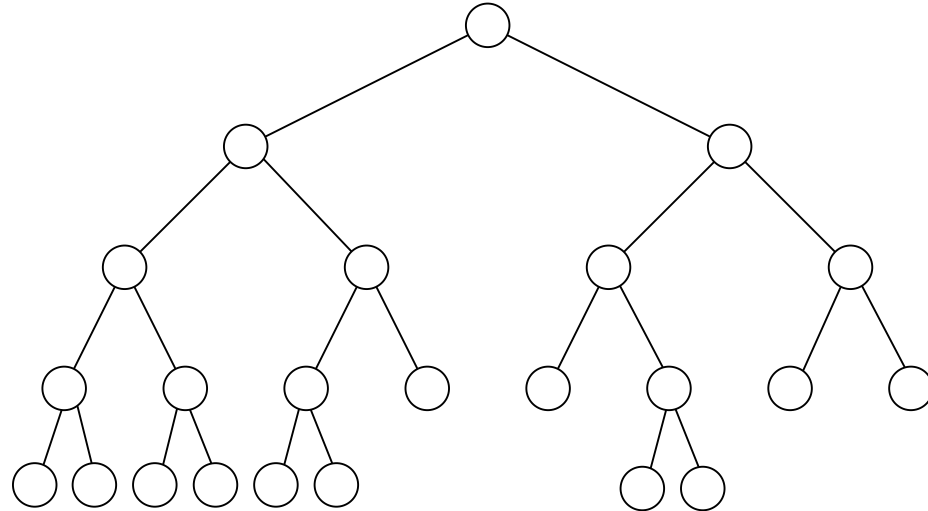
Idee:

- Lasse nur Bäume zu, die bestimmte **Strukturbedingungen** erfüllen.
- Strukturbedingungen **erzwingen geringe Tiefe** (z. B. $O(\log n)$ bei n Einträgen).
- **Implementiere** Wörterbuch-Operationen *insert* und *delete* so, dass

  (i) sie die **Strukturbedingungen erhalten** und

  (ii) ihre **Kosten O(Baumtiefe)** sind.

?? Attraktiv: Perfekte Balance.
D. h.: Alle Blätter auf zwei benachbarten Levels:



Tiefe d erfüllt $2^d - 1 < n \leq 2^{d+1} - 1$, also $d < \log(n+1) \leq d+1$, also
$d = \lceil \log(n+1) \rceil - 1$. (Bemerkung: $\lceil \log(n+1) \rceil = |\text{bin}(n)|$, Länge der Binärdarst.)

Attraktiv**??** Nein! Einfüge- und Lösch-Operationen zu teuer.

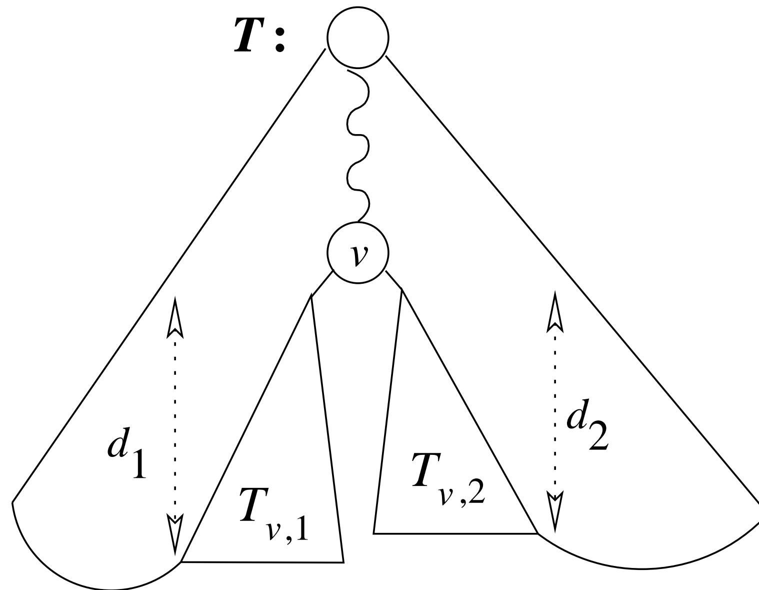
Häufig benutzte Strukturbedingungen:

- **AVL-Bäume** (behandeln wir ausführlich)
- **Rot-Schwarz-Bäume** ([Cormen et al.], [Sedgewick])
- **2-3-Bäume** (behandeln wir prinzipiell)
- **2-3-4-Bäume** ([Cormen et al.], [Sedgewick],[D./Mehlhorn/Sanders])
- **B-Bäume** ([Cormen et al.], Vorlesungen zu Datenbanktechnologie)

4.3.1 AVL-Bäume

Höhenbalancierte binäre Suchbäume

[G. M. **A**delson-**V**elski und J. M. **L**andis 1962]



$$|d_2 - d_1| \leq 1$$

Definition 4.3.1

Ein **Binärbaum** T heißt **höhenbalanciert**, falls in **jedem Knoten** v in T für den Teilbaum $T_v = (T_{v,1}, v, T_{v,2})$ mit Wurzel v gilt:

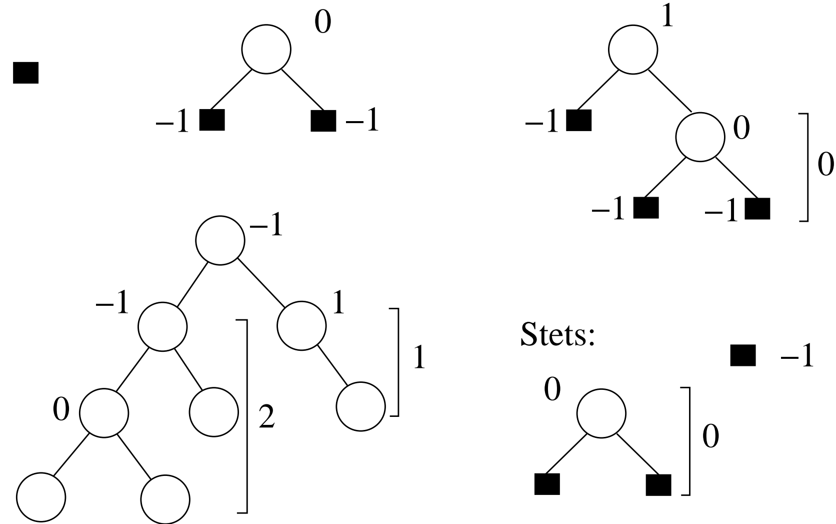
$$\underbrace{d(T_{v,2}) - d(T_{v,1})}_{\text{„Balancefaktor } \mathit{bal} \text{ in } v\text{“}} \in \{-1, 0, 1\} \, .$$

Äquivalent ist die folgende **rekursive** Charakterisierung:

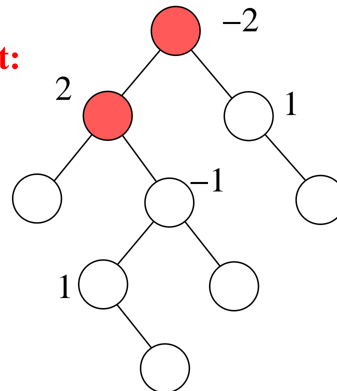
(i) Der leere Baum $\square$ ist höhenbalancierter BB über U.

(ii) Sind T_1 und T_2 höhenbalancierte BB, $x \in U$, und ist $\mathit{bal} = d(T_2) - d(T_1) \in \{-1, 0, 1\}$, so ist (T_1, x, T_2) höhenbalancierter BB über U (mit **Balancefaktor** *bal*).

Beispiele:



Nicht höhenbalanciert:



Definition 4.3.2

Ein **AVL-Baum** ist ein **höhenbalancierter binärer Suchbaum**.

Für die **Implementierung** von AVL-Bäumen muss man in jedem inneren Knoten v seinen Balancefaktor **bal(v)** speichern.

Hoffnung: AVL-Bäume sind nicht allzu tief. Tatsächlich: „... logarithmisch tief"!

Satz 4.3.3

Ist T ein höhenbalancierter Baum mit $n \geq 1$ Knoten, so gilt

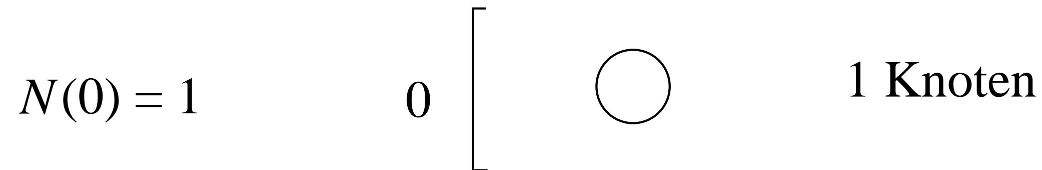
$$\boxed{d(T) \leq 1{,}4405 \cdot \log_2 n.}$$

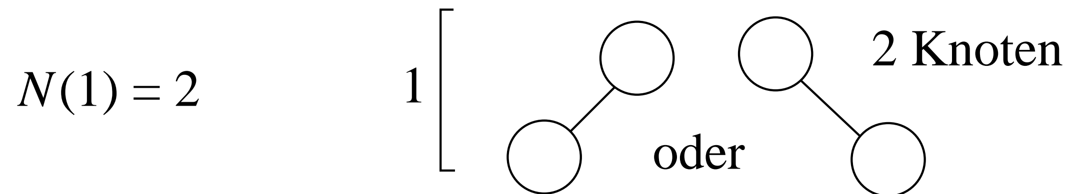
D. h.: AVL-Bäume sind höchstens um den Faktor $1{,}4405$ tiefer als vollständig balancierte binäre Suchbäume mit derselben Knotenzahl.

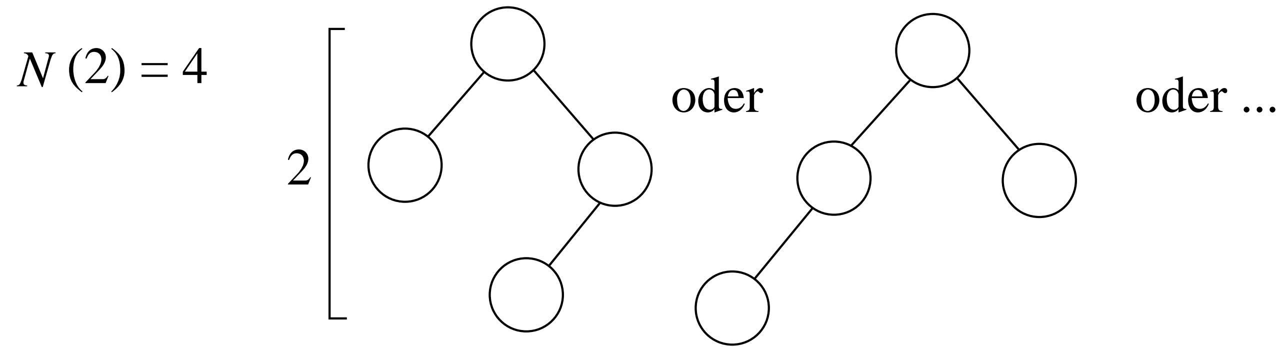
Beweisansatz: Wir zeigen, dass ein AVL-Baum mit Tiefe d exponentiell in d viele Knoten haben muss, nämlich mindestens Φ^d viele für eine Konstante $\Phi > 1$, mit $\log_\Phi 2 \leq 1{,}4405$.

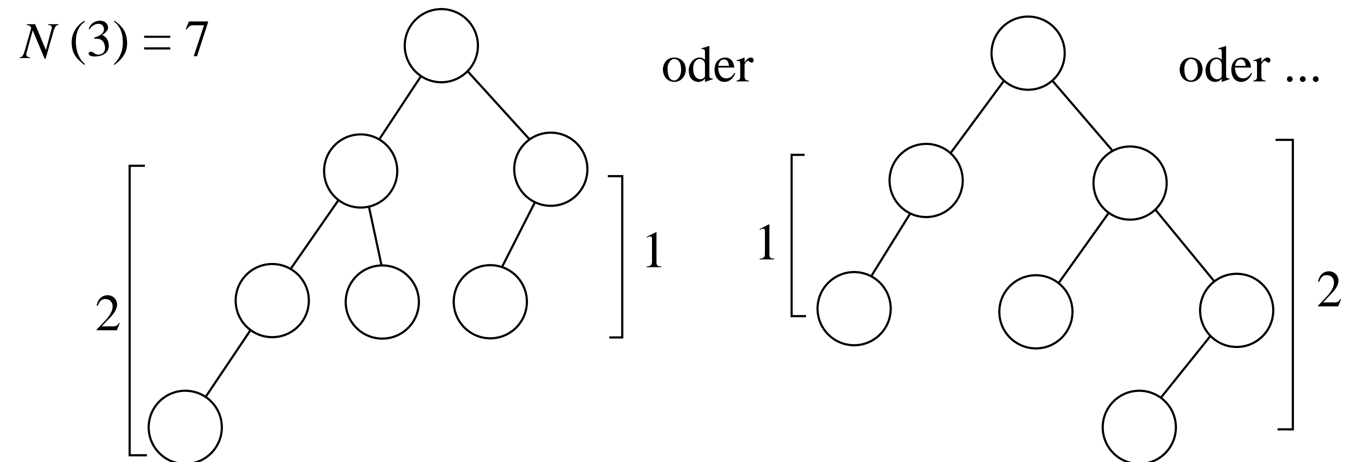
Beweis von Satz 4.3.3: Für $d = 0, 1, 2, \ldots$ setze

$N(d) :=$ **minimale Anzahl innerer Knoten** in einem AVL-Baum mit Tiefe d.

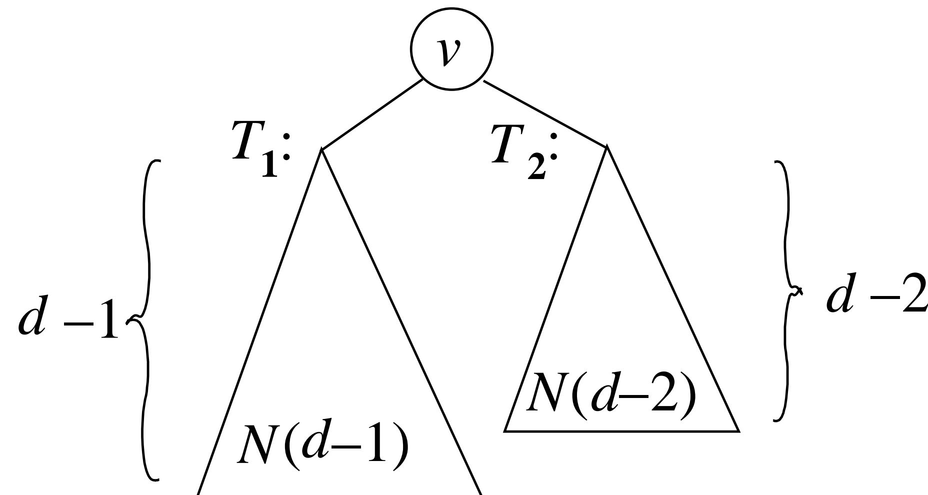





$N(2) = 4$
2
oder
oder ...


$N(3) = 7$
oder
oder ...
2
1
1
2

Behauptung 1: $N(d) = 1 + N(d-1) + N(d-2)$, für $d \geq 2$.



Beweis: Damit der höhenbalancierte Baum T der Tiefe d minimale Knotenzahl hat, muss ein Unterbaum von T Tiefe $d-1$ und der andere Tiefe $d-2$ haben. (Es ist klar, dass $N(d-1) > N(d-2)$ gilt.) Weiter müssen die Unterbäume minimale Knotenzahl für ihre jeweilige Tiefe haben. $\square$

$N(d) = 1 + N(d-1) + N(d-2)$, für $d \geq 2$. – $N(d)$ für kleine d:

d	$N(d)$
0	1
1	2
2	4
3	7
4	12
5	20
6	33
7	54
8	88
9	143

Eindruck: exponentielles Wachstum.

Man kann zeigen: $N(d) = F_{d+3} - 1$, für die **Fibonacci-Zahlen** $F_0, F_1, F_2, \ldots$.

Behauptung 2:

$$N(d) \geq \Phi^d \text{ , für } d \geq 0,$$

wobei $\Phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}618\ldots$ („**goldener Schnitt**“).

$(*)$ Φ ist (eine, nämlich die positive) Lösung der Gleichung $x^2 = x + 1$.

Beweis von Beh. 2: Vollständige Induktion.

I.A.: Für $d = 0$: $N(0) = 1 = \Phi^0$; für $d = 1$: $N(1) = 2 > \Phi^1$.

Sei nun $d \geq 2$. **I.V.**: Behauptung gilt für $d' < d$. **I.-Schritt:**

$$N(d) \overset{\text{Beh. 1}}{=} 1 + N(d-1) + N(d-2)$$

$$\overset{\text{I.V.}}{\geq} \Phi^{d-1} + \Phi^{d-2} = \Phi^{d-2}(\Phi + 1) \overset{(*)}{=} \Phi^{d-2} \cdot \Phi^2 = \Phi^d.$$

□

Nun sei T ein höhenbalancierter Baum mit Höhe $d(T) \geq 0$ und n Knoten.

Nach Behauptung 2: $\Phi^{d(T)} \leq n$.

Logarithmieren liefert $d(T) \leq \log_\Phi n$, d. h.

$$d(T) \leq (\log_\Phi 2) \cdot \log_2 n.$$

Es gilt: $\log_\Phi 2 = (\ln 2)/(\ln \Phi) = 1{,}440420\ldots < 1{,}4405$.

Damit ist Satz 4.3.3 bewiesen. $\square$

AVL-Bäume: höhenbalancierte binäre Suchbäume.
Wissen: haben logarithmische Tiefe.

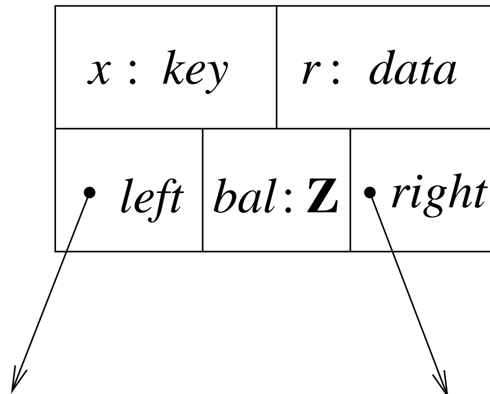
Müssen noch zeigen:

Man kann die Wörterbuchoperationen so implementieren,

dass die AVL-Eigenschaft erhalten bleibt,

und der Zeitbedarf proportional zur Tiefe ist.

Knotenformat:



x: `key`;
r: `data`;
bal: `integer`; // Legal: $\{-1, 0, 1\}$
left, *right*: `AVL_Tree`
// Zeiger auf Baumknoten

Vorlesungsvideo:

AVL Rotationen

4.3.2 Implementierung der Operationen bei AVL-Bäumen

AVL_empty: Erzeuge *NULL*-Zeiger. (Wie bei gewöhnlichem BSB.)

AVL_lookup: Wie bei gewöhnlichem BSB.

Brauchen nur: **AVL_insert**(T, x, r) und **AVL_delete**(T, x).

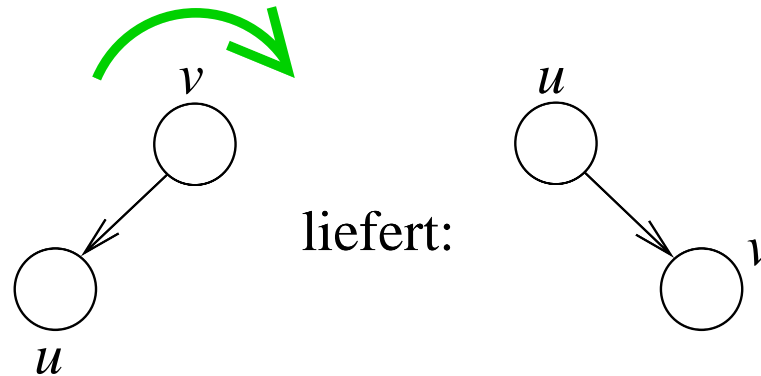
Grundansatz: Führe Operationen aus wie bei gewöhnlichem BSB.

Eventuell wird dadurch Bedingung „Höhenbalancierung“ verletzt.

„Reparatur“: **Rebalancierung**, erfolgt rekursiv.

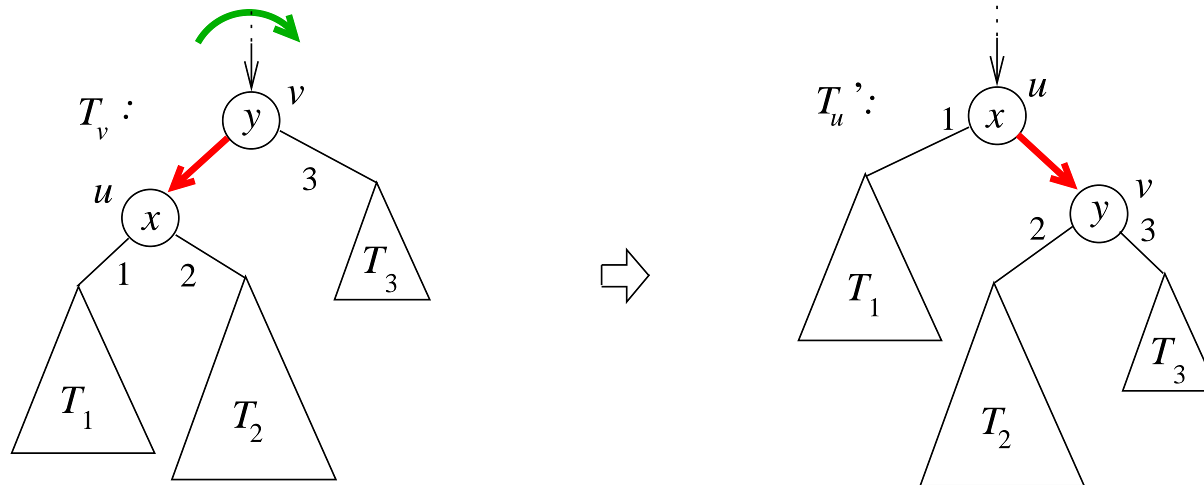
Rotationen: Hilfsoperationen für Rebalancierung

Rechtsrotation: „kippe 1 Kante nach rechts“:



Rotationen: Hilfsoperationen für Rebalancierung

Rechtsrotation: Mit Unterbäumen:



Beobachte: Knotenmengen von T_v und T'_u sind gleich $\wedge$ T'_u ist binärer Suchbaum.

Denn: Knotenmengen sind klar. Weil T_v binärer Suchbaum ist, gilt für v_1 in T_1, v_2 in T_2, v_3 in T_3: *key*$(v_1) < x <$ *key*$(v_2) < y <$ *key*(v_3). Also ist T'_u auch BSB.

Beim Umbau ändert sich nur: rechtes Kind von u und linkes Kind von v, sowie der Zeiger auf Wurzelknoten (von v auf u umsetzen).

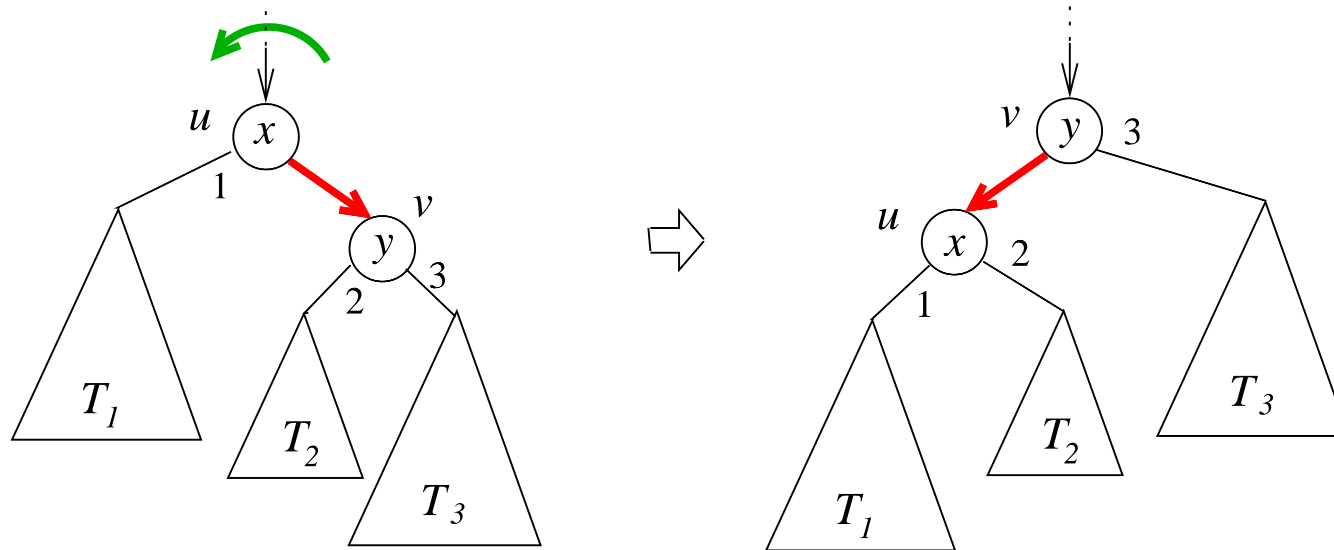
Rotationen: Hilfsoperationen für Rebalancierung

Rechtsrotation als Programm:

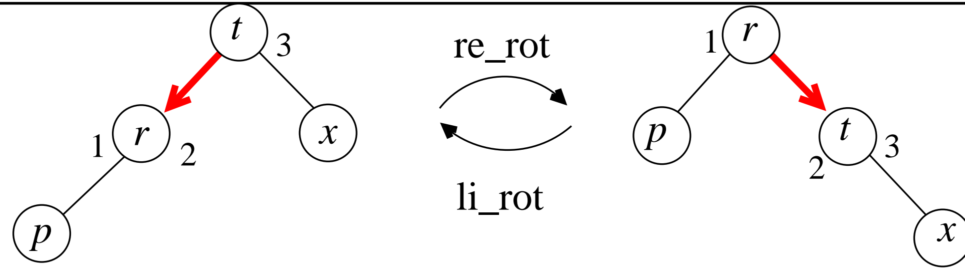
Funktion rotateR(v : AVL_Tree) : AVL_Tree
(1) // $v \neq \square$, v.left $\neq \square$
(2) u : AVL_Tree ; // Hilfsvariable
(3) u $\leftarrow$ v.left ;
(4) v.left $\leftarrow$ u.right ;
(5) u.right $\leftarrow$ v ;
(6) **return** u
(7) // **!! Balancefaktoren in** u **und** v sind falsch!

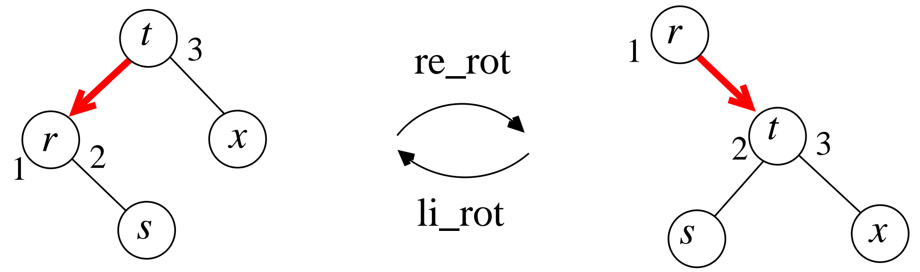
Rotationen: Hilfsoperationen für Rebalancierung

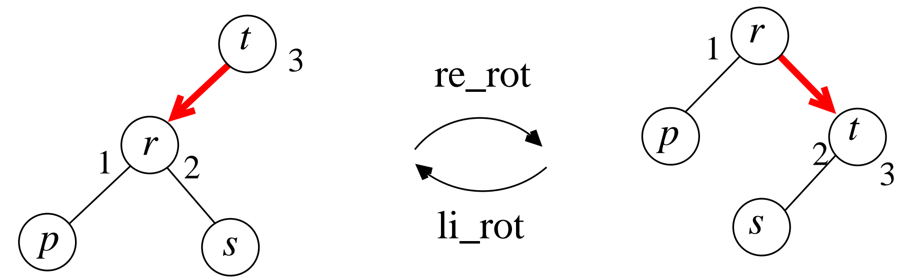
Linksrotation: Umkehrung von Rechtsrotation, Implementierung analog.



Hier und in den folgenden *Beispielen*:
Nummern bezeichnen Anschlussstellen für die Unterbäume.

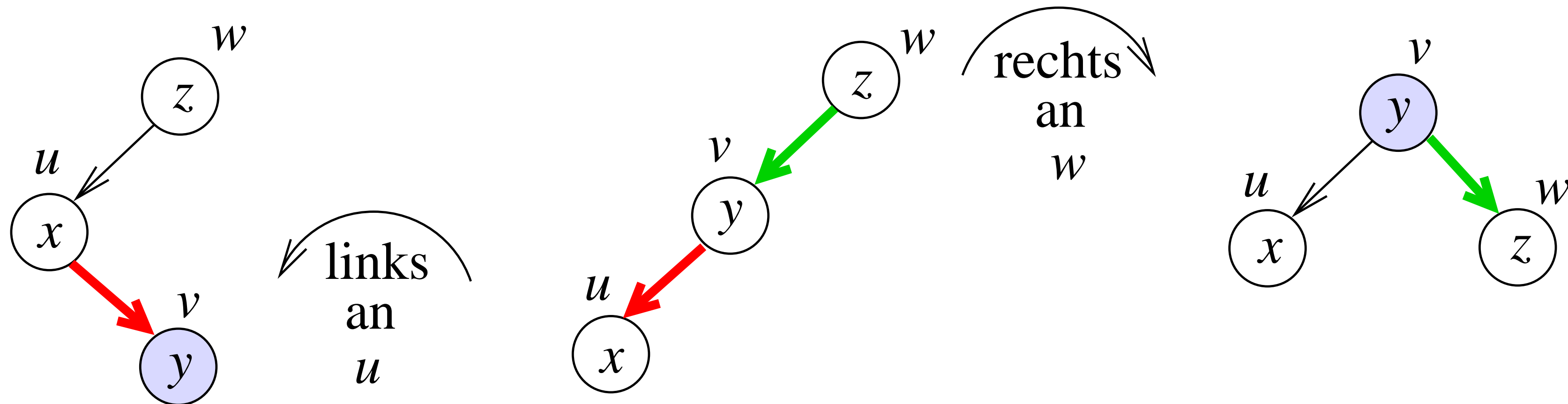

t
3
r
1
2
x
p
re_rot
li_rot
r
1
p
t
2
3
x


t
3
r
1
2
x
s
re_rot
li_rot
r
1
t
2
3
s
x


t
3
r
1
2
p
s
re_rot
li_rot
r
1
p
t
2
3
s

Doppelrotationen: Links-Rechts, Rechts-Links

Beispiel: **Links-Rechts-Doppelrotation**

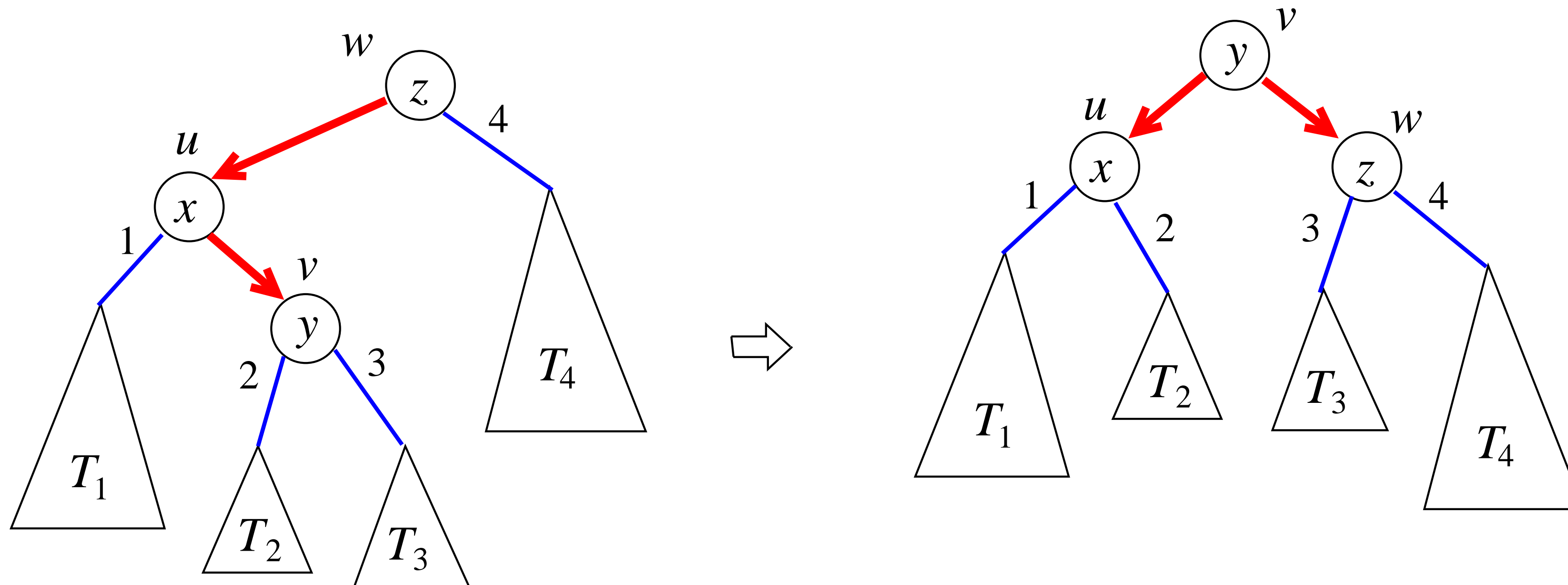


Anzuwenden auf Zick-Zack-Weg aus zwei Kanten, Form **„links-rechts“**.

Erst eine **Links**rotation, dann eine **Rechts**rotation.

Effekt: **Tiefster** Knoten v wird Wurzel.

Links-Rechts-Doppelrotation: Mit Unterbäumen



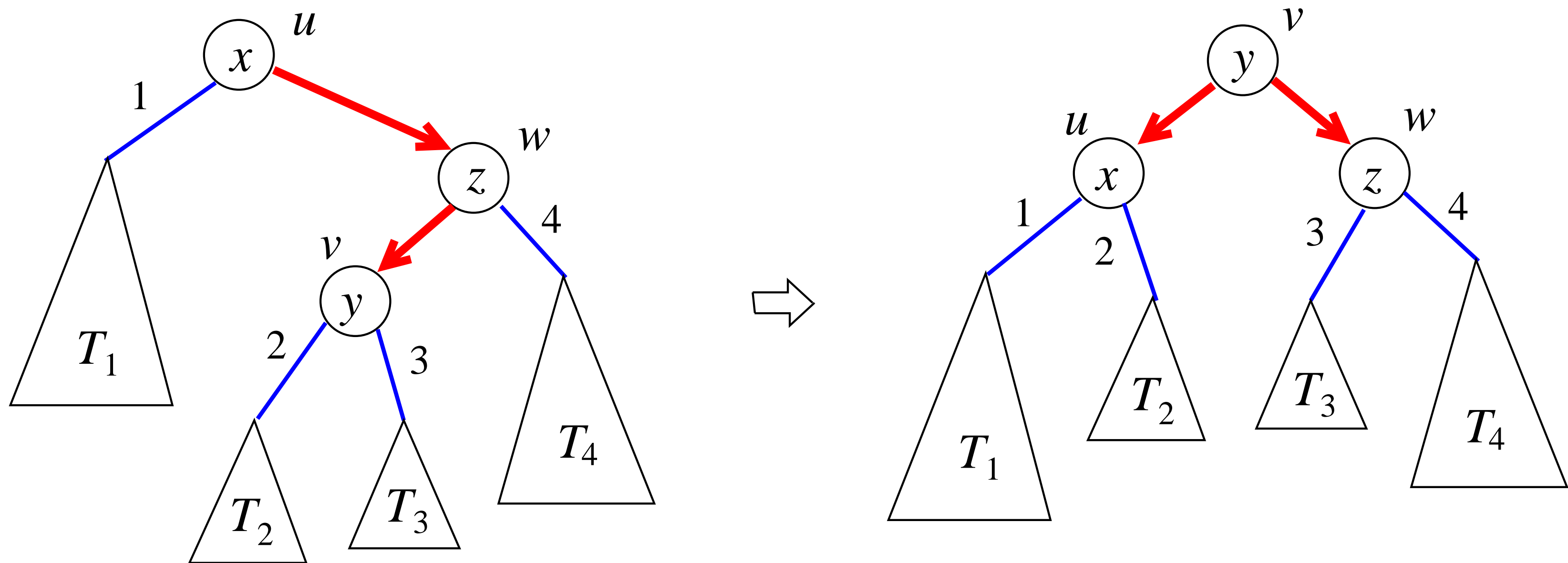
Gesamteffekt: Der **unterste** Knoten v des Zick-Zack-Wegs („links-rechts“) wandert nach oben, wird **Wurzel**; die beiden anderen Knoten u und w werden linkes und rechtes Kind. (Vier Teilbäume werden umgehängt, zwei bleiben gleich.)

LR-Doppelrotation als Programm

Funktion rotateLR($\mathtt{w}$: $\mathtt{AVL_Tree}$) : $\mathtt{AVL_Tree}$

(1) // Eingabe: $\mathtt{w} \neq \square$ mit $\mathtt{w.left} \neq \square$ und $\mathtt{w.left.right} \neq \square$
(2) $\mathtt{u}, \mathtt{v}$: $\mathtt{AVL_Tree}$;
(3) $\mathtt{u} \leftarrow \mathtt{w.left}$;
(4) $\mathtt{v} \leftarrow \mathtt{u.right}$;
(5) $\mathtt{w.left} \leftarrow \mathtt{v.right}$;
(6) $\mathtt{u.right} \leftarrow \mathtt{v.left}$;
(7) $\mathtt{v.left} \leftarrow \mathtt{u}$;
(8) $\mathtt{v.right} \leftarrow \mathtt{w}$;
(9) **return** $\mathtt{v}$
(10) // **!! Balancefaktoren in** $\mathtt{u}$**,** $\mathtt{v}$**,** $\mathtt{w}$ sind falsch!
⋮ ⋮

Rechts-Links-Doppelrotation:
Symmetrisch zu Links-Rechts-Doppelrotation



Implementierung: Analog zu Links-Rechts-Doppelrotation.

Vorlesungsvideo:

AVL_Insert

AVL_insert(T, x, r)

Anschauliche Beschreibung:

1. Füge ein wie bei gewöhnlichem BSB. Dies erzeugt neuen Knoten (außer Update).

2. Laufe dann **Einfügeweg** **von unten nach oben** ab, kontrolliere Balancebedingung. Wenn diese nirgendwo verletzt ist: fertig.

3. Sonst: $\boldsymbol{v} :=$ **tiefster Knoten** auf Einfügeweg mit $bal(v) \in \{-2, 2\}$.

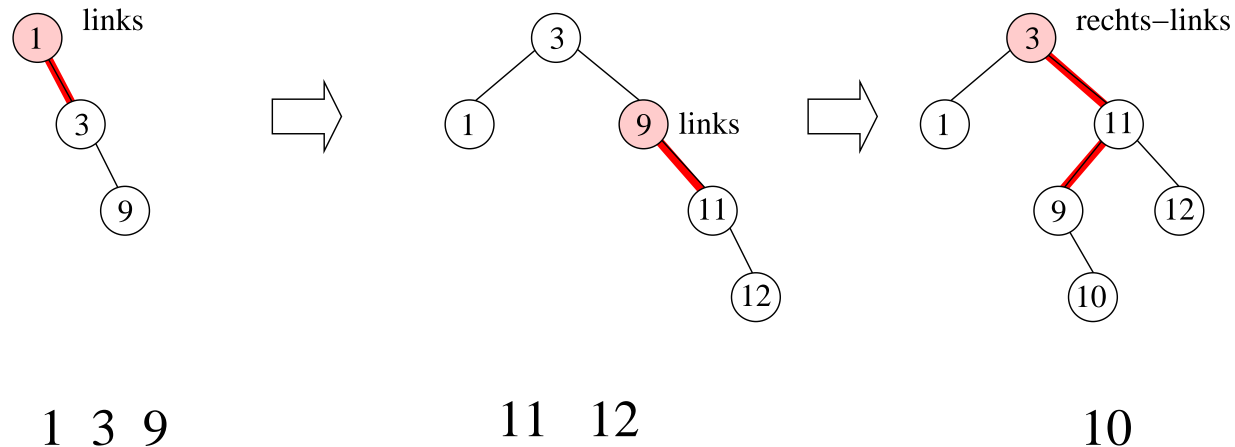
An v: Einfach- oder Doppelrotation. (Dann Rebalancierung beendet.)

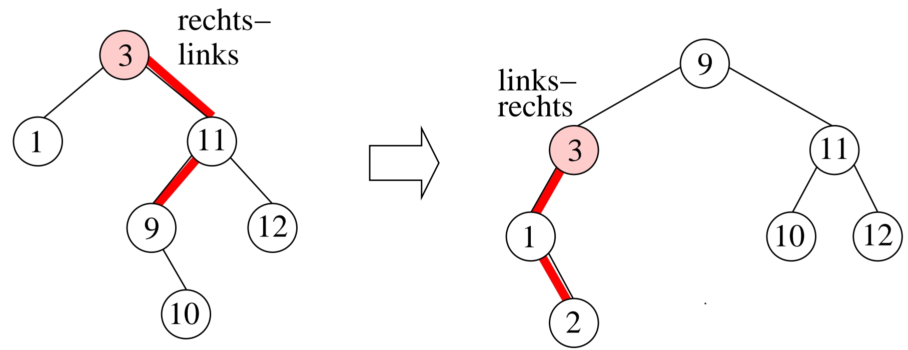
3a) Wenn ein **äußerer** Teilbaum unter v (links-links oder rechts-rechts) zu tief ist:
Einfache Rotation hebt diesen Teilbaum ein Level höher.

3b) Wenn ein **mittlerer** Teilbaum unter v (links-rechts oder rechts-links) zu tief ist:
Doppelrotation hebt den mittleren Teilbaum ein Level höher.

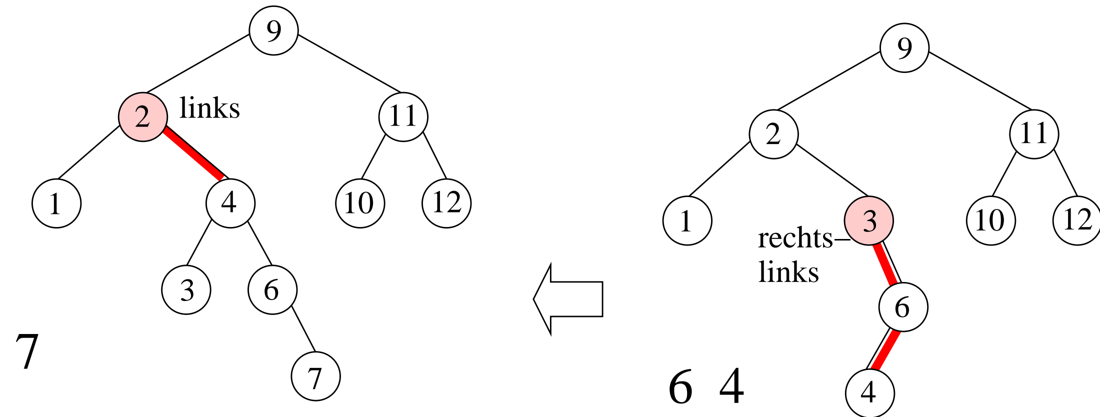
Zum Ausprobieren:
`https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html`

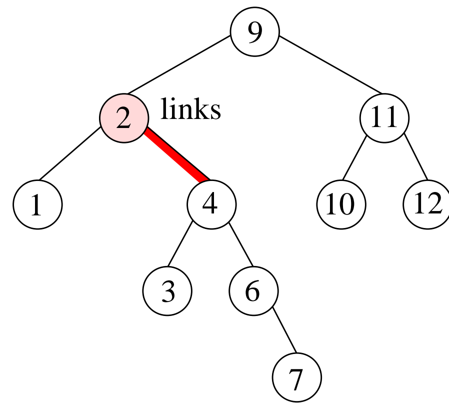
Beispiel: Einfügen von 1, 3, 9, 11, 12, 10, 2, 6, 4, 7, 0 in anfangs leeren AVL-Baum. Wir zeichnen nur Situationen, in denen **Rotationen stattfinden**. Der tiefste Knoten, an dem die Balancebedingung verletzt ist, ist **rot** gezeichnet.

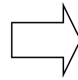


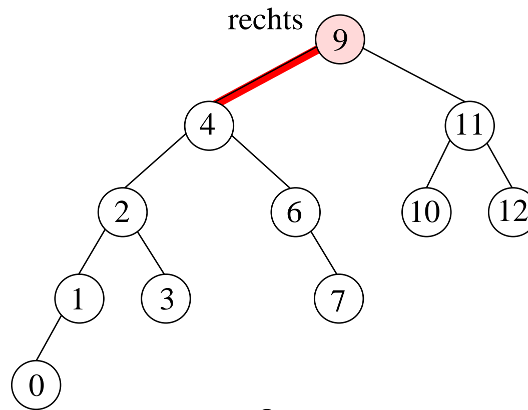


2

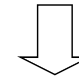


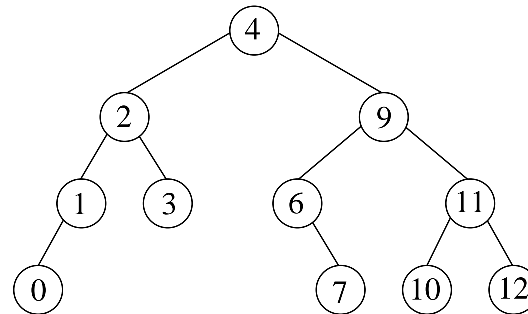






0





Etwas knifflig: Rekursive Programmierung des Ablaufs.

Programm kann nicht verwenden: „Globale Sicht“, Vergleichen von Tiefen, weder durch „Hinschauen“ noch rechnerisch (Tiefen von Teilbäumen werden nicht mitgeführt!).

Benutzt werden:

- Balancefaktoren `T.bal` in den Knoten,
- Flagbit „`deeper`“, das als Resultat eines rekursiven Aufrufs **AVL_insert**(T, x, r) mitteilt, ob der Baum dadurch **tiefer** geworden ist.

Wenn **AVL_insert**(T', x, r) für einen Unterbaum T' von T aufgerufen wurde, gibt es zur Rebalancierung an der Wurzel von T eine große Fallunterscheidung, gesteuert durch (alte) Balancefaktoren und die „deeper“-Meldung aus dem rekursivem Aufruf.

Wir entwickeln das Programm systematisch durch Erweitern der gewöhnlichen BSB-Einfügung.

Funktion AVL_insert(T,x,r): (AVL_Tree,boolean)

```
(1)  // Eingabe: T: AVL_Tree, x: key, r: data
(2)  // Ausgabe: T: AVL_Tree, deeper: boolean

(3)  1. Fall: T = □
(4)     T: new AVL_Tree // Erzeuge neuen AVL-Baum-Knoten
(5)     T.key ← x ;
(6)     T.data ← r ;
(7)     T.left ← □;
(8)     T.right ← □;
(9)     T.bal ← 0 ;
(10)    return (T, true) .
(11)       // Baumhöhe hat sich von −1 auf 0 erhöht.
```

```
(12) 2. Fall: T ≠ □ and T.key = x.
(13)     // Update-Situation!
(14)     T.data ← r ;
(15)     return (T, false) .
(16)         // Baumstruktur hat sich nicht verändert.

(17) 3. Fall: T ≠ □ and x < T.key.
(18)     (T.left, left_deeper) ← AVL_insert(T.left, x, r) ;
(19)         // Rekursives Einfügen in linken Unterbaum, liefert AVL-Baum und Flagbit
(20)     (T, deeper) ← RebalanceInsLeft(T,left_deeper) ;
(21)         // Rebalancierung in der Wurzel von T, falls nötig, s. unten
(22)     return (T, deeper) .
```

(23) **4. Fall:** $\texttt{T} \neq \square$ **and** `T.key < x`.

(24) $(\texttt{T.right}, \texttt{right_deeper}) \leftarrow$ **AVL_insert**$(\texttt{T.right}, \texttt{x}, \texttt{r})$;

(25) // Rekursives Einfügen in rechten Unterbaum, liefert AVL-Baum und Flagbit

(26) $(\texttt{T}, \texttt{deeper}) \leftarrow$ **RebalanceInsRight**`(T,right_deeper)` ;

(27) // Rebalancierung in der Wurzel von `T`, falls nötig,

symmetrisch zum **3. Fall**.

(28) **return** $(\texttt{T}, \texttt{deeper})$.

Zeile (18): **AVL_insert** wird rekursiv auf `T.left`, `x`, `r` angewendet.

Ergebnis: Unterbaum `T.left` geändert. Flagbit `left_deeper` bedeutet:

`left_deeper` = *false*: `T.left` hat gleiche Höhe wie vorher;
`left_deeper` = *true*: `T.left` ist um 1 Level tiefer geworden.

Wir beweisen die Korrektheit durch Induktion über rekursive Aufrufe. Daher können wir als **I.V.** verwenden: `T.left` ist AVL-Baum (mit korrekten Balancefaktoren).

Verbleibende **Probleme**:

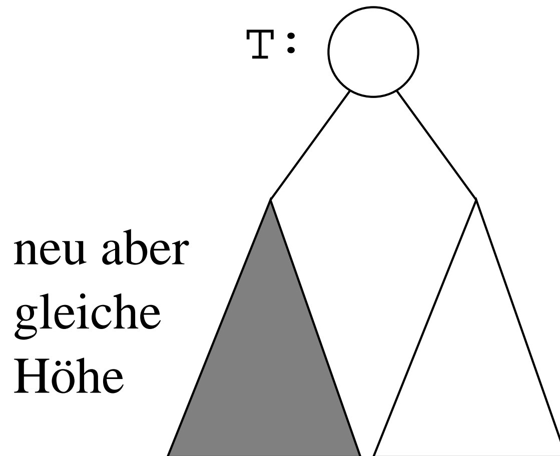
- Ist die Balancebedingung in der Wurzel von `T` erfüllt?
- Der Balancefaktor `T.bal` in der Wurzel von `T` könnte falsch sein.

Zeile (20): **RebalanceInsLeft** prüft, ändert Struktur, korrigiert Balancefaktoren;
Ergebnis: Neuer AVL-Baum `T` und Flagbit `deeper`.

RebalanceInsLeft(T,left_deeper)

Fall RebIL-1

left_deeper = *false*



Aktion:

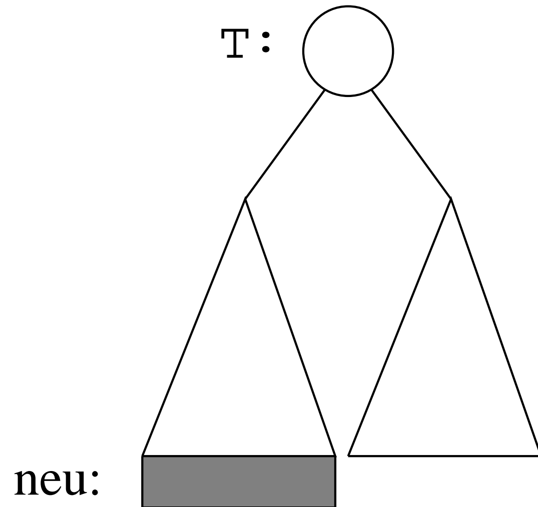
deeper ← *false* ;
// T.bal stimmt noch

// Wenn dieser Fall einmal eingetreten ist,
// setzt er sich nach oben immer weiter fort.
// D. h.: Rebalancierung ist abgeschlossen.

RebalanceInsLeft(T,left_deeper)

Fall RebIL-2 **Aktion:**

left_deeper $=$ *true* $\wedge$
T.bal $=$ 0 // alter Wert!



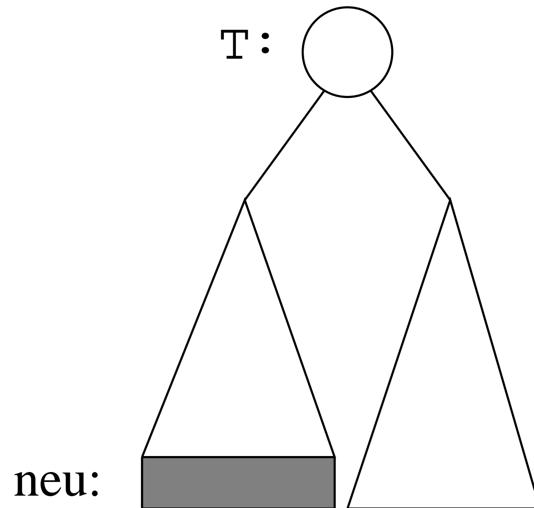
deeper $\leftarrow$ *true* ;
T.bal $\leftarrow$ -1;

// Die Rebalancierungsaufgabe wird nach oben weitergereicht. Balancefaktor in Wurzel ist $\neq 0$.

RebalanceInsLeft(T,left_deeper)

Fall RebIL-3

left_deeper = *true* $\wedge$
T.bal = 1 // alter Wert!



Aktion:

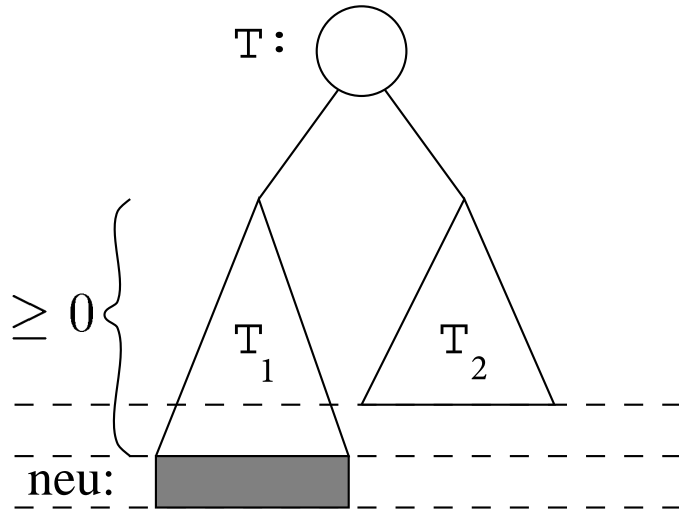
deeper $\leftarrow$ *false* ;
T.bal $\leftarrow 0$;

// Rebalancierung ist abgeschlossen, ohne Strukturänderung.

RebalanceInsLeft(T,left_deeper)

Fall RebIL-4 **Aktion:**

left_deeper = *true* $\wedge$
T.bal = -1 // alter Wert!



???

// Strukturänderung nötig.

Beobachte: Schon **vor** dem rekursiven Aufruf **AVL_insert**$(\mathtt{T.left}, \mathtt{x}, \mathtt{r})$ muss der linke Unterbaum $T_1 = \mathtt{T.left}$ von T nicht leer gewesen sein.

Schon gesehen: **RebIL-1**, **RebIL-3** (analog: **RebIR-1**, **RebIR-3**) liefern `deeper` = *false*.

Werden sehen: **RebIL-4** und **RebIR-4** liefern ebenfalls `deeper` = *false*.

$\Rightarrow$ beim rekursiven Aufruf der Rebalancierung für `T.left`
ist Fall **RebIL-2** oder **RebIR-2** eingetreten (Baum ist tiefer, durch neues Blatt).

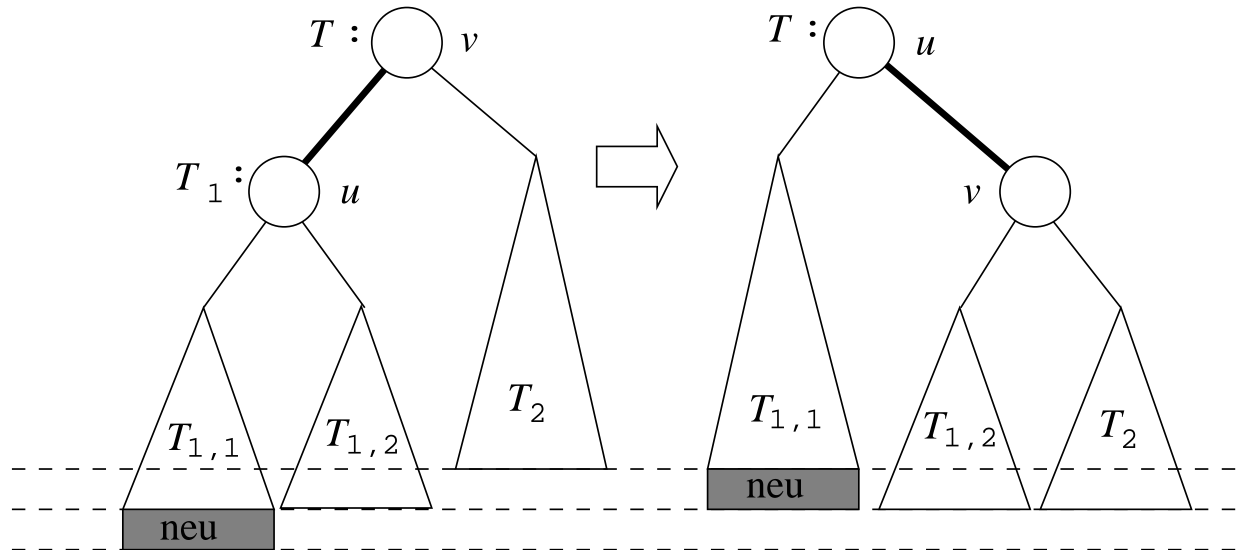
$\Rightarrow$ Balancefaktor `T.left.bal` in der Wurzel von T_1 ist -1 oder 1.

Unterfall RebIL-4.1

`T.left.bal` $= -1$

Aktion:

Rechtsrotation



`T` $\leftarrow$ **rotateR**(`T`) ;

`deeper` $\leftarrow$ *false* ;

`T.bal` $\leftarrow 0$;

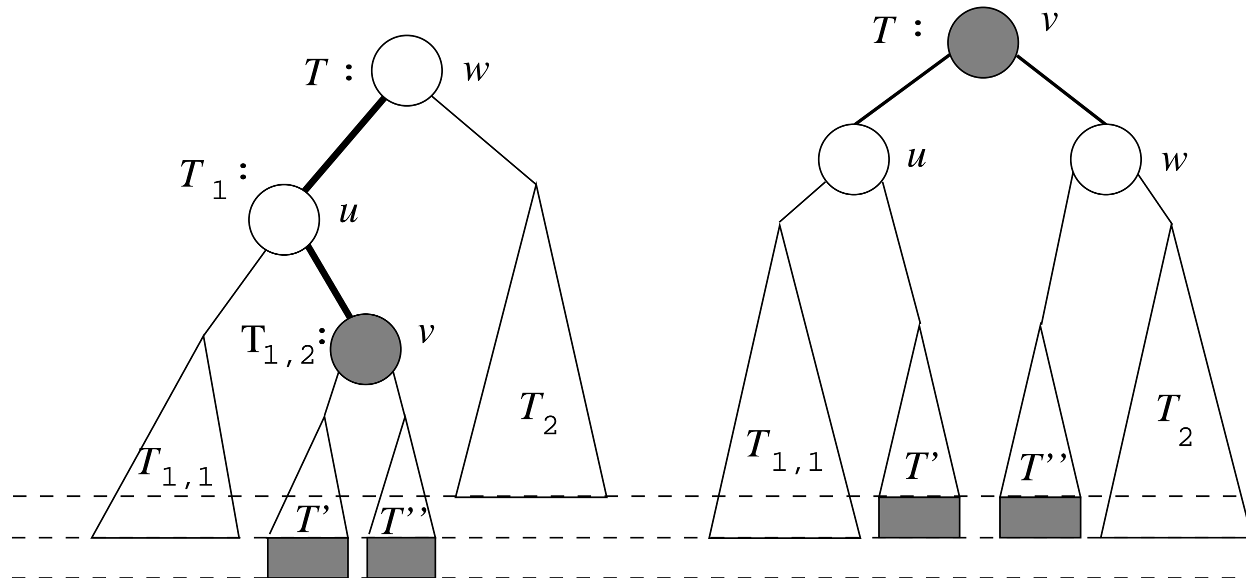
`T.right.bal` $\leftarrow 0$;

Unterfall RebIL-4.2

`T.left.bal` $= 1$

Aktion:

Links-Rechts-Doppelrotation



`T` ← **rotateLR**(`T`) ;

`deeper` ← *false* ;

Neue `bal`-Werte: s. Tabelle.

Neue `bal`-Werte im Fall RebIL-4.2:

(alt)	(neu)		
v.`bal`	u.`bal`	w.`bal`	v.`bal`
-1	0	1	0
0	0	0	0
1	-1	0	0

u ist Wurzel von `T.left`, w ist Wurzel von `T.right`, v ist die Wurzel von T.

Die Zahl v.`bal` (alt) stand schon **vor der LR-Rotation** in v.`bal`, gibt also den Balancefaktor des alten Unterbaums $T_{1,2}$ = `T.left.right` an.

Überlege: Kann es überhaupt passieren, dass der alte Baum $T_{1,2}$ Balancefaktor 0 hatte?

Antwort: Ja! Im rekursiven Aufruf **AVL_insert**(`T.left,x,r`) bestand `T.left` nur aus einem Knoten, $T_{1,2}$ ist der neu eingefügte Knoten; T', T'', $T_{1,1}$ und T_2 sind leer, haben also alle Tiefe -1.

Proposition 4.3.4

Die rekursive Prozedur **AVL_insert**(T, x, r) führt die Wörterbuchoperation *insert* korrekt durch, d. h.: Aus T entsteht ein AVL-Baum für *insert*(f_T, x, r).

Die Prozedur hat Laufzeit $O(\log n)$ und führt höchstens eine Einfach- oder Doppelrotation durch.

Man überlege (an Beispielen), wie die beschriebene rekursive Realisierung von **AVL_insert** die intuitive Beschreibung von Folie 60 umsetzt.

4.3.5 Folgerung (aus Algorithmus **AVL_insert**):

Für jedes $n \geq 0$ gibt es einen höhenbalancierten Baum mit n Knoten.

Beweis: Man fügt $1, \ldots, n$ (in beliebiger Reihenfolge) mit **AVL_insert** in einen anfangs leeren AVL-Baum ein. **Gute Übung:** Führe dies für $n = 16$ (z. B.) von Hand aus.

Bemerkung: Wenn T ein beliebiger höhenbalancierter Baum mit n Knoten ist, dann gibt es eine Einfügereihenfolge für Schlüssel $1, \ldots, n$, die genau diesen Baum erzeugt – sogar ohne jede Rotation **(Übung)**.

Vorlesungsvideo:

AVL_Delete

AVL_delete(T, x)

Anschauliche Beschreibung:

1. Suche Knoten mit x und lösche ihn wie bei gewöhnlichem BSB. Dadurch wird ein Knoten u mit T_u.*left* $= \square$ oder T_u.*right* $= \square$ entfernt. Sei w der Vorgängerknoten von u. Einer der Unterbäume von w ist nun „flacher“ als vorher.

2. Laufe Weg von w zur Wurzel **von unten nach oben**, kontrolliere an jedem Knoten v dieses Weges die Balancebedingung.

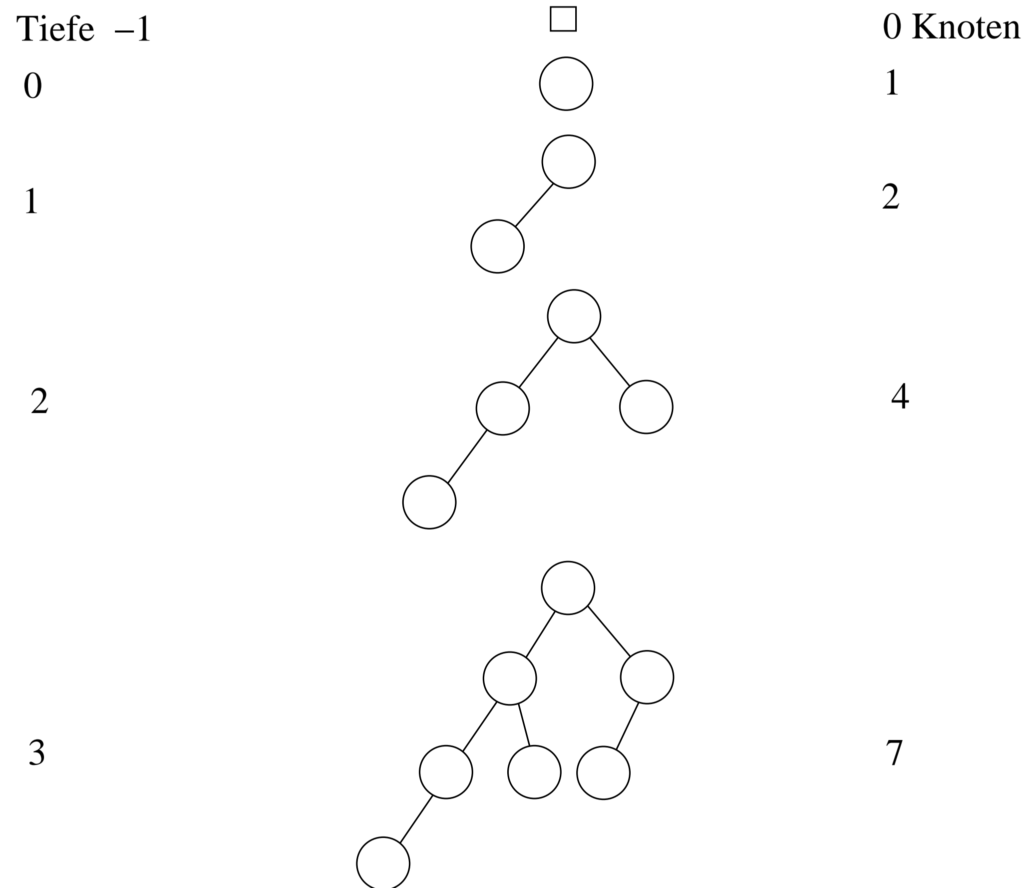
3. Wenn an v die Balancebedingung verletzt ist, d. h. $bal(v) \in \{-2, 2\}$, führe Einfach- oder Doppelrotation aus. **Aber welche?**

3a) Wenn ein **äußerer** Teilbaum unter v (links-links oder rechts-rechts) der tiefste ist:
Einfache Rotation, um diesen Teilbaum ein Level höher zu heben.
(Möglich ist: Der Geschwister-Teilbaum ist genauso tief. Dann ist die Rebalancierung beendet.)

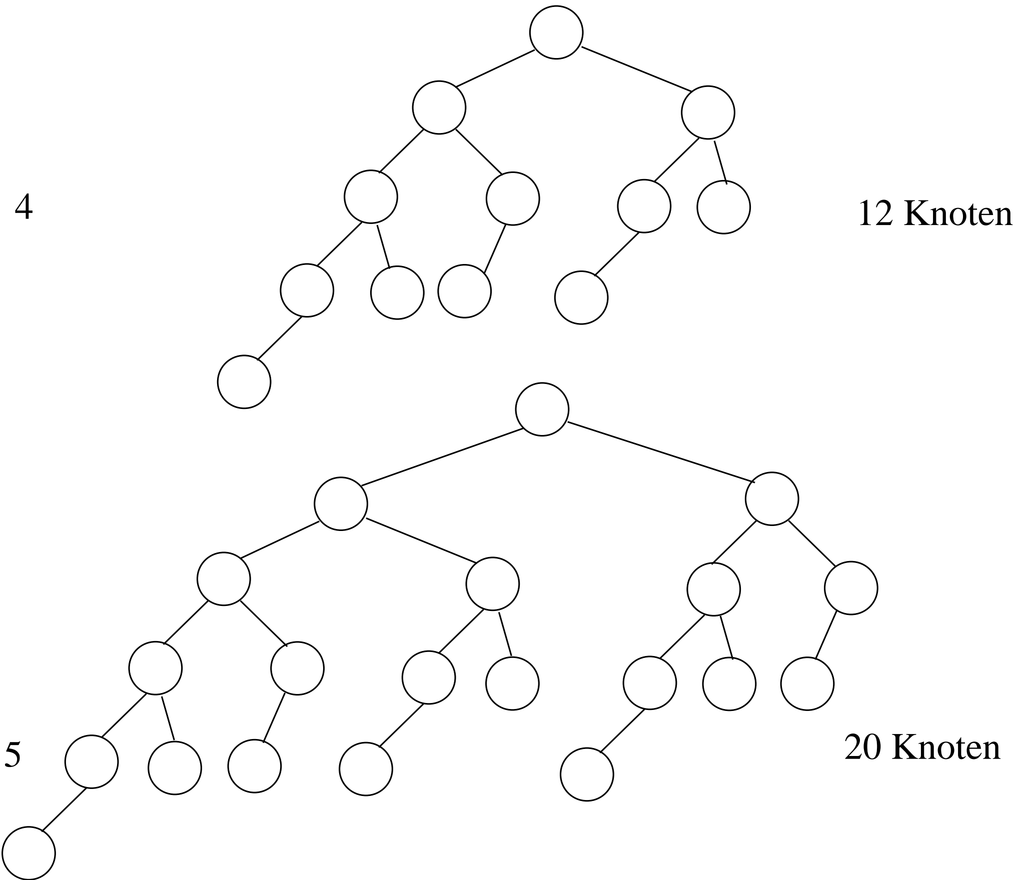
3b) Wenn ein **mittlerer** Teilbaum unter v (links-rechts oder rechts-links) der (strikt) tiefste ist:
Die entsprechende **Doppelrotation** hebt diesen mittleren Teilbaum ein Level höher.

Zum Ausprobieren: `https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html`

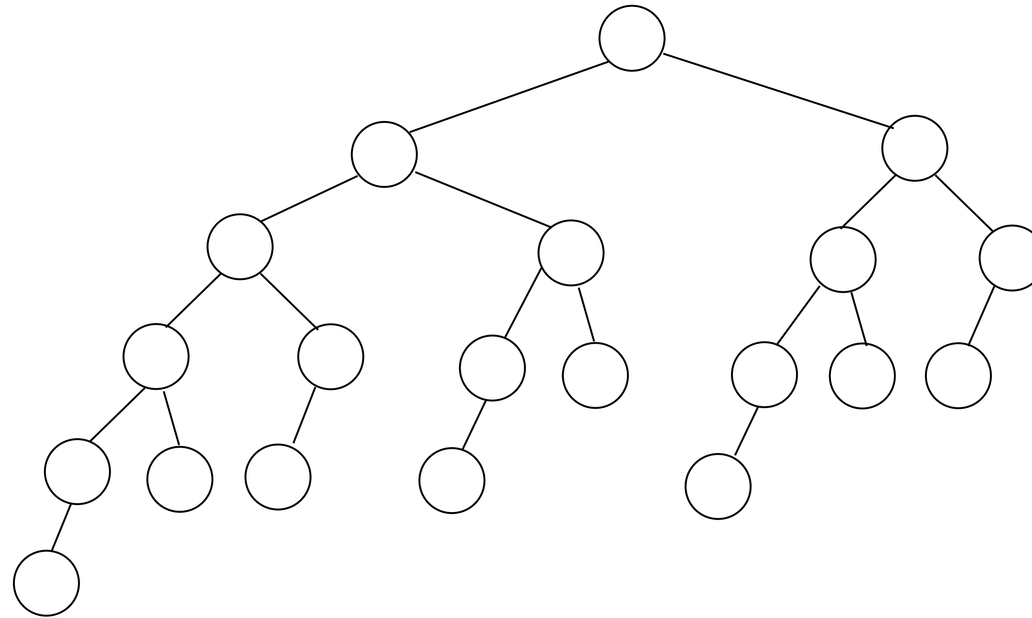
Beispiel: Fibonacci-Bäume . . .



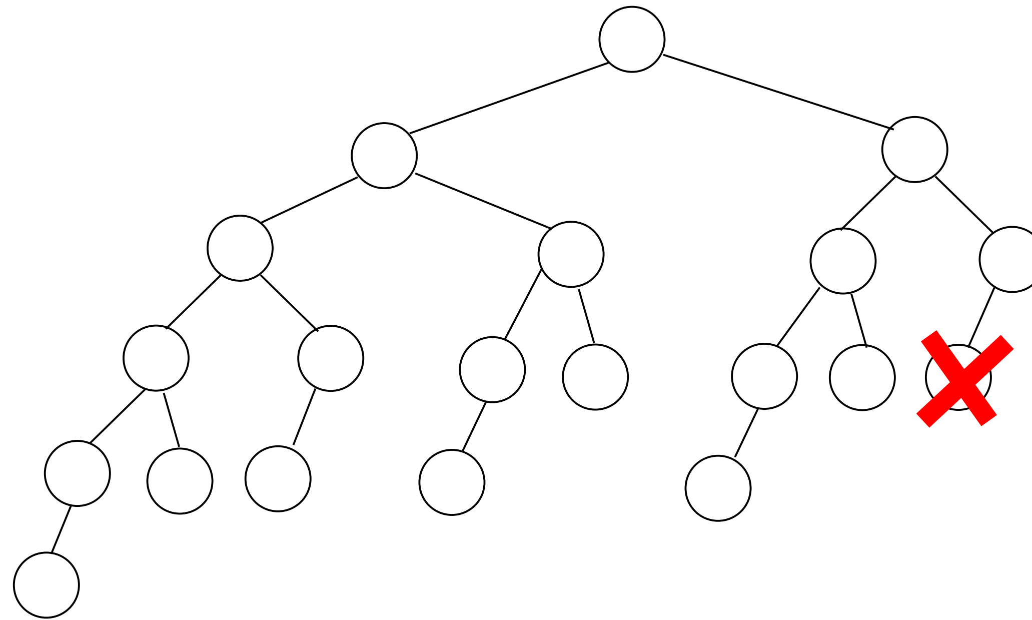
Fibonacci-Bäume der Tiefen $-1, 0, 1, 2, 3$

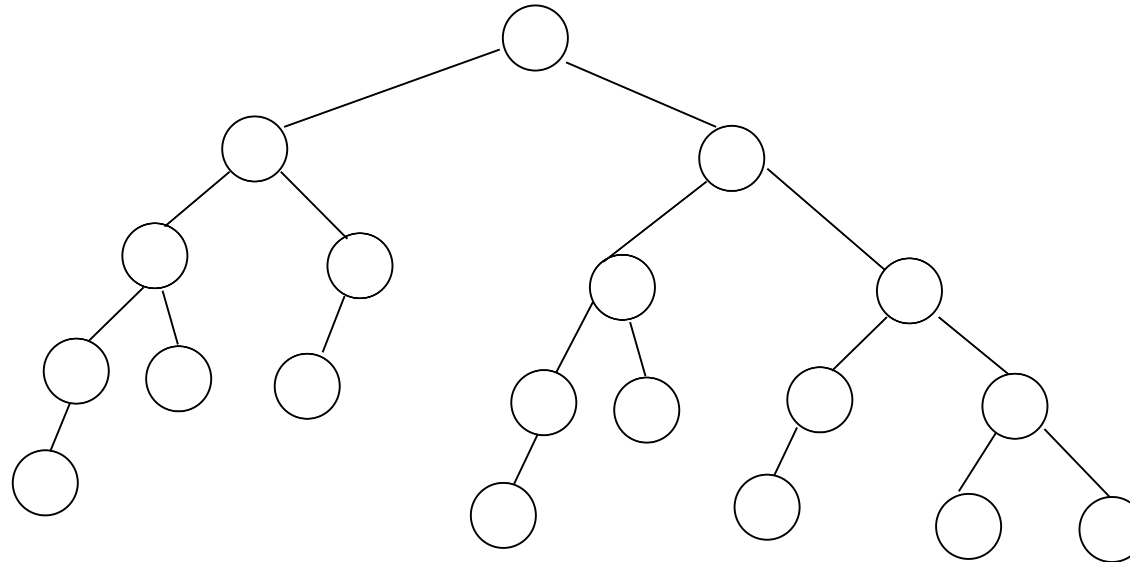


Fibonacci-Bäume der Tiefen 4 und 5



Blatt v:
Starte bei Wurzel, gehe rekursiv in flacheren Unterbaum.
Entfernen von v löst Rotations**kaskade** aus.





Fertig!

Programmierung von **AVL_delete**: Nicht prüfungsrelevant!

Können muss man aber: Ausführen der Löschung und Rebalancierung, analog zur Einfügung.

In Prozeduren: `shallower` ist ein Flagbit, das anzeigt, ob der soeben bearbeitete Teilbaum durch die Löschung flacher geworden ist.

Funktion AVL_delete(T,x): (AVL_Tree,boolean)

(1) // **Eingabe:** T: AVL_Tree, x: key
(2) // **Ausgabe:** T: AVL_Tree, shallower: boolean

(3) **1. Fall:** $\mathtt{T} = \square$ // x nicht da
(4) **return** (T, *false*).
(5) // Keine Rebalancierung nötig!

(6) **2. Fall:** $\mathtt{T} \neq \square$ **and** x < T.key.
(7) (T.left, left_shallower) ← **AVL_delete**(T.left, x);
(8) // Rekursives Löschen im linken Unterbaum
(9) (T, shallower) ← **RebalanceDelLeft**(T,left_shallower);
(10) // Rebalancierung in der Wurzel von T, **s. unten**
(11) **return** (T, shallower).

(12) **3. Fall:** $\texttt{T} \neq \square$ **and** `T.key < x`.

(13) $(\texttt{T.right}, \texttt{right_shallower}) \leftarrow$ **AVL_delete**$(\texttt{T.right}, \texttt{x})$;

(14) // Rekursives Löschen im rechten Unterbaum

(15) $(\texttt{T}, \texttt{shallower}) \leftarrow$ **RebalanceDelRight**`(T,right_shallower)` ;

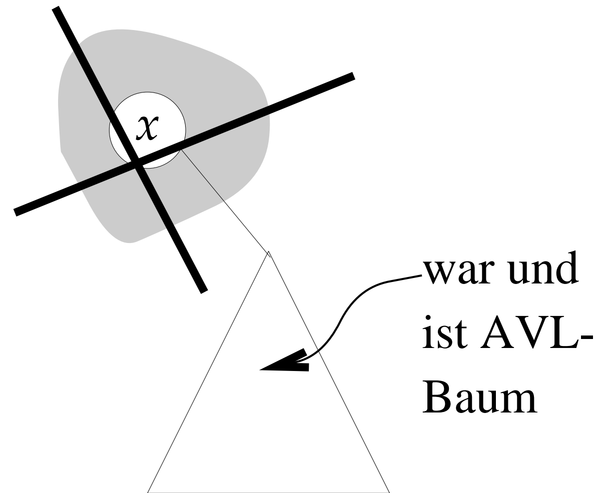
(16) // Rebalancierung in der Wurzel von `T`, **symmetrisch zu 2. Fall**

(17) **return** $(\texttt{T}, \texttt{shallower})$.

(18) **4. Fall:** $\mathtt{T} \neq \square$ **and** `T.key = x`.

(19) // Entferne Wurzelknoten!

(20) **Fall 4a:** $\mathtt{T.left} = \square$



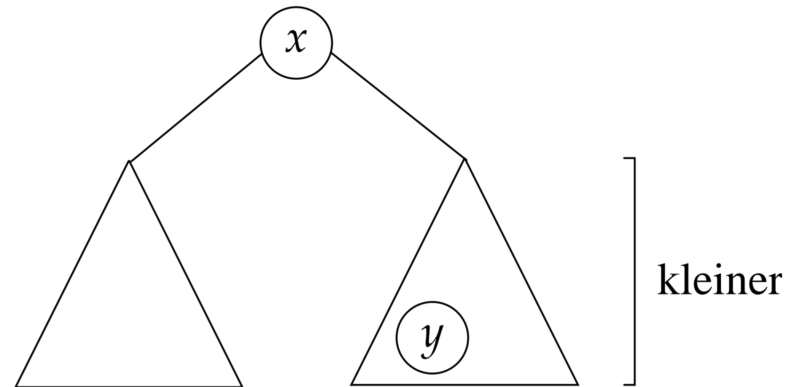
(21) **return** (`T.right`, *true*) .

(22) // Baum ist flacher als vorher.

(23) **Fall 4b:** $\mathtt{T.right} = \square$

(24) **return** (`T.left`, *true*) .

(25) **Fall 4c:** $\mathtt{T} \neq \Box$ **and** beide Unterbäume nicht leer



(26) (T.right, v, right_shallower) ← **AVL_extractMin**(T.right) ;

(27) v.left ← T.left; v.right ← T.right;

(28) v.bal ← T.bal;

(29) T ← v; // v ersetzt die Wurzel von T

(30) (T, shallower) ← **RebalanceDelRight**(T,right_shallower) ;

(31) **return** (T, shallower) .

Funktion AVL_extractMin(`T`): (`AVL_Tree`,`boolean`)

(1) // **Eingabe:** `T: AVL_Tree` mit `T` $\neq \square$

(2) // **Ausgabe:** `T, v: AVL_Tree`; `shallower: boolean`

(3) // Knoten `v` mit minimalem Eintrag aus `T` ausgeklinkt

(4) // `shallower` = *true*, falls `T` flacher geworden ist

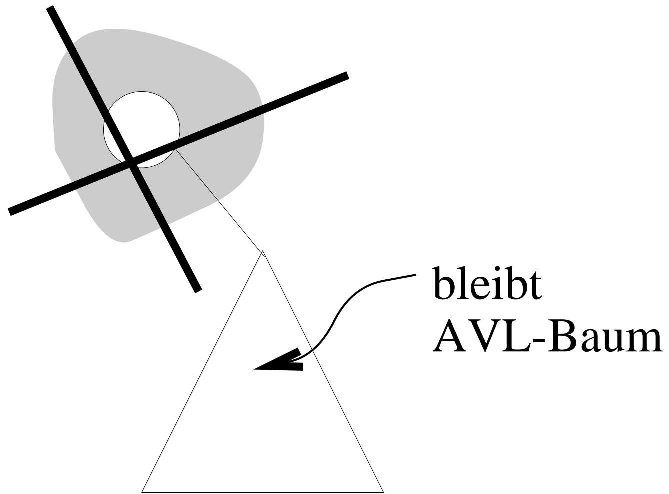
...

In **AVL_extractMin**(T):

Fall „Schluss“:

$\texttt{T.left} = \square$

Wurzel abhängen:



$\texttt{v} \leftarrow \texttt{T}$;

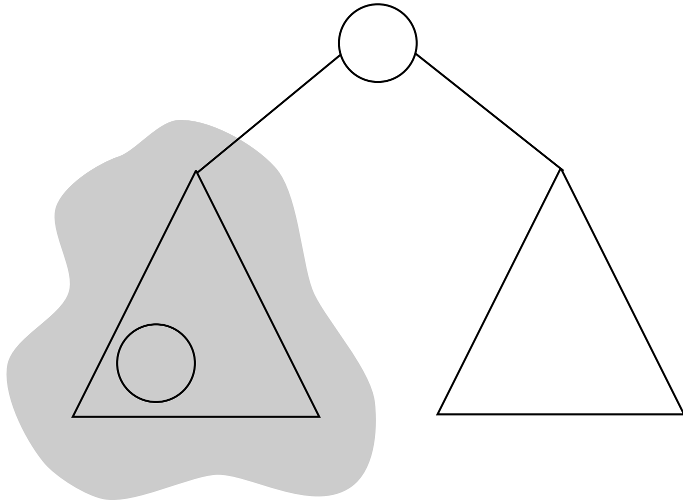
$\texttt{T} \leftarrow \texttt{T.right}$

return $(\texttt{T}, \texttt{v}, \textit{true})$.

In **Prozedur AVL_extractMin**(T):

Fall „Rekursion“:

T.left $\neq \square$



(T, v, left_shallower) ← **AVL_extractMin**(T.left);

(T, shallower) ← **RebalanceDelLeft**(T, left_shallower);

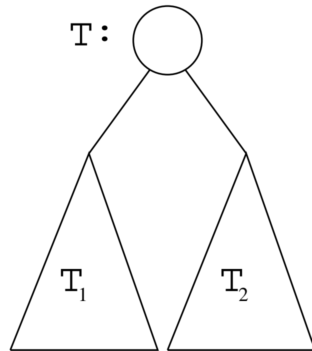
return(T, v, shallower).

RebalanceDelLeft`(T,left_shallower)`

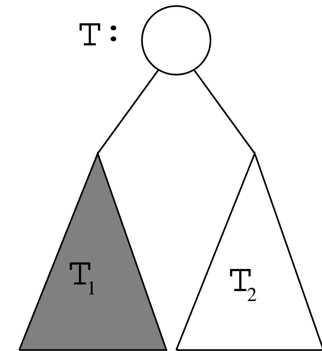
// prüft Balancebedingung in der Wurzel von `T`, korrigiert

// (**RebalanceDelRight**: symmetrisch)

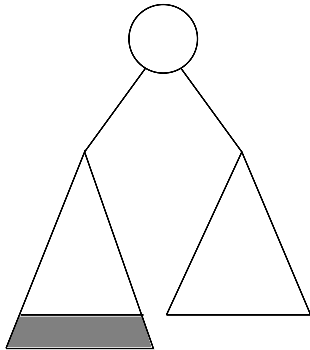
Situation:



durch rekursives
Löschen in T_1
umgebaut zu



$T_1 =$ `T.left` verändert; „`left_shallower`“ teilt mit, ob T_1 flacher geworden ist.
`T.bal` ist bislang unverändert.

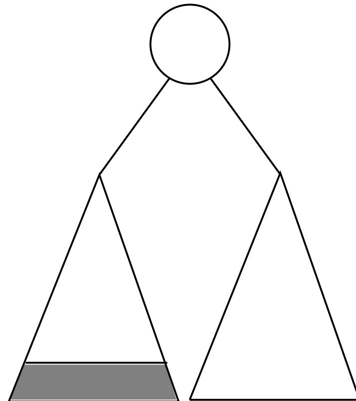
Fall	Aktion
Fall RebDL-1:	
`left_shallower` $=$ *false*	`shallower` $\leftarrow$ *false*;
Fall RebDL-2:	
`left_shallower` $=$ *true* $\wedge$ `T.bal` $=$ -1	
 geschrumpft	`shallower` $\leftarrow$ *true*; `T.bal` $\leftarrow$ 0;

Fall

Aktion

Fall RebDL-3:

$\texttt{left_shallower} = \textit{true} \wedge \texttt{T.bal} = 0$



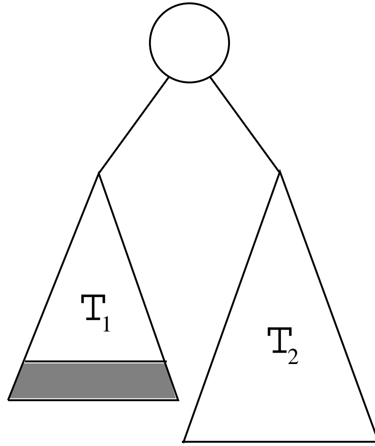
geschrumpft

$\texttt{shallower} \leftarrow \textit{false};$

$\texttt{T.bal} \leftarrow 1;$

Fall RebDL-4:

`left_shallower` = *true* ∧ `T.bal` = 1



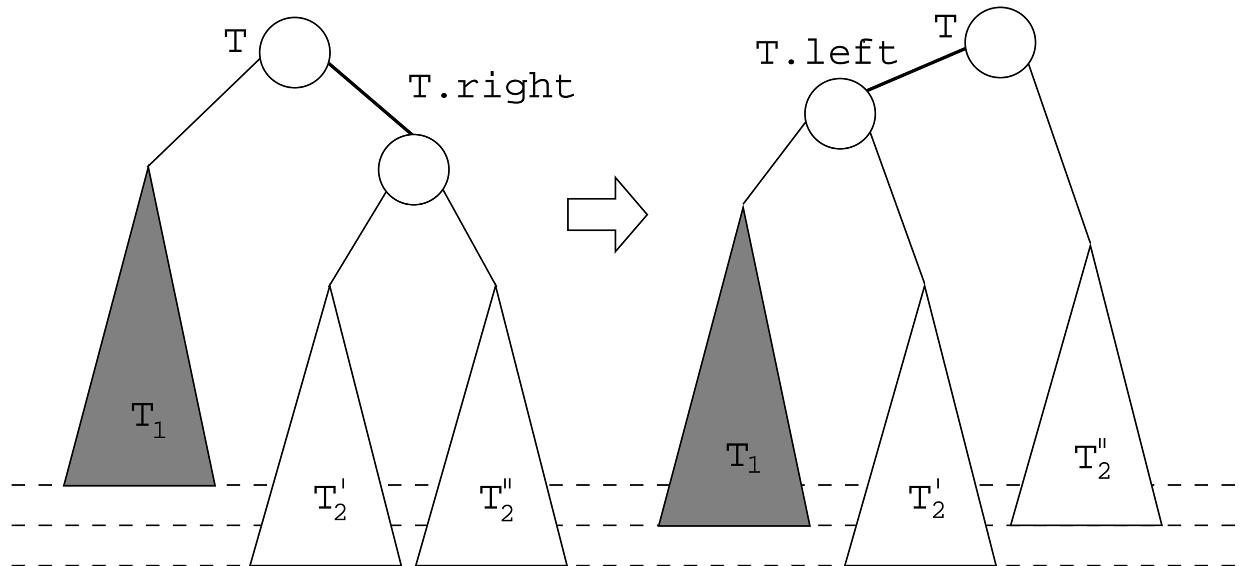
geschrumpft

Unterfälle je nach Aussehen von T_2.

Wir wissen: T_2 hat Tiefe mindestens 1.

(T_1 kann vor der Löschung nicht leer gewesen sein, hatte also Tiefe mindestens 0.)

Fall RebDL-4.1: `T.right.bal` $= 0$; // Zwei gleich tiefe Unterbäume in `T.right`

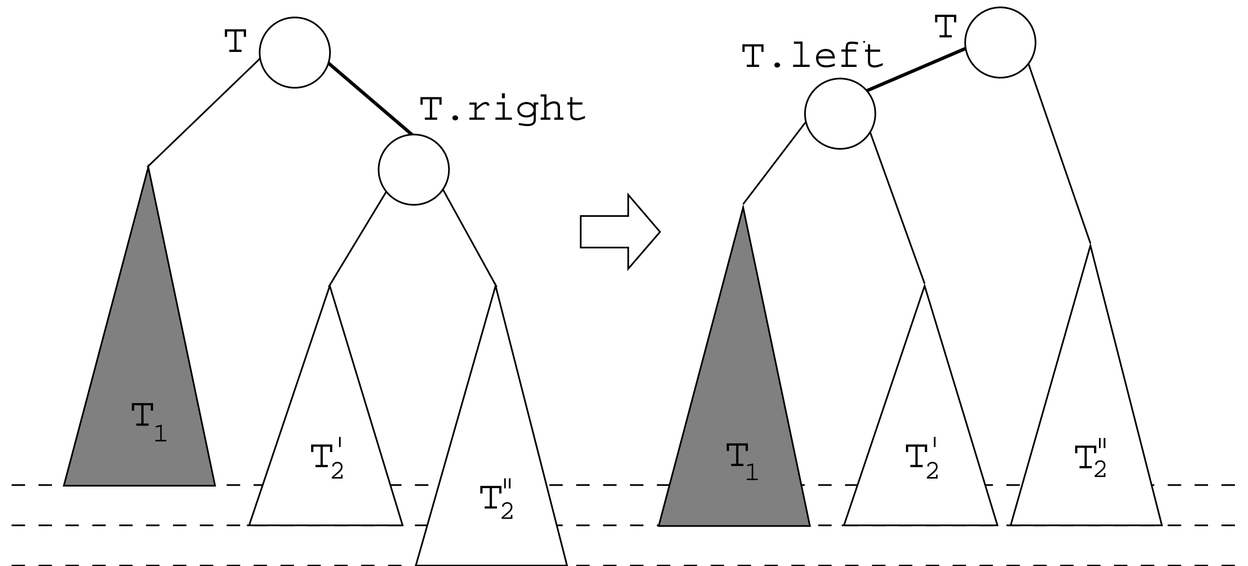


Linksrotation!

T ← **rotateL**(T);
`T.left.bal` ← 1;
`T.bal` ← -1;
`shallower` ← *false*;

// Rebalancierung beendet.

Fall RebDL-4.2: `T.right.bal` $= 1$; // der äußere Unterbaum in `T.right` ist tiefer

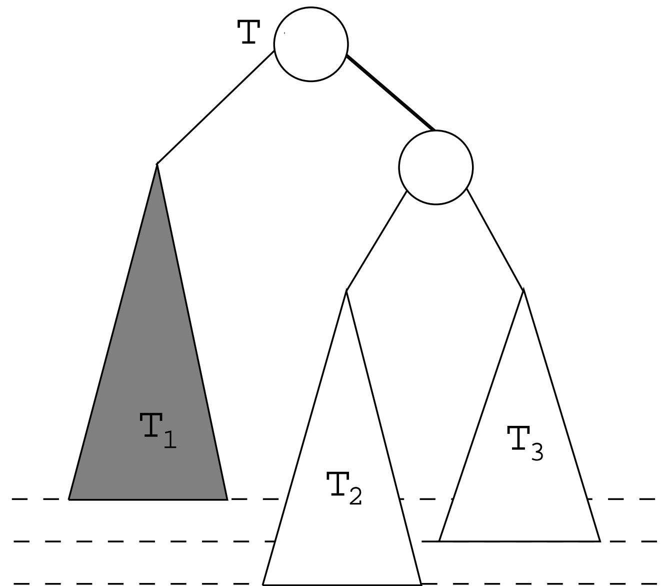


Linksrotation!

T ← **rotateL**(T);
`T.left.bal` ← 0;
`T.bal` ← 0;
`shallower` ← *true*;

// Rebalancierung muss weitergehen!

Fall RebDL-4.3: `T.right.bal` $=$ -1; // der innere Unterbaum in `T.right` ist tiefer

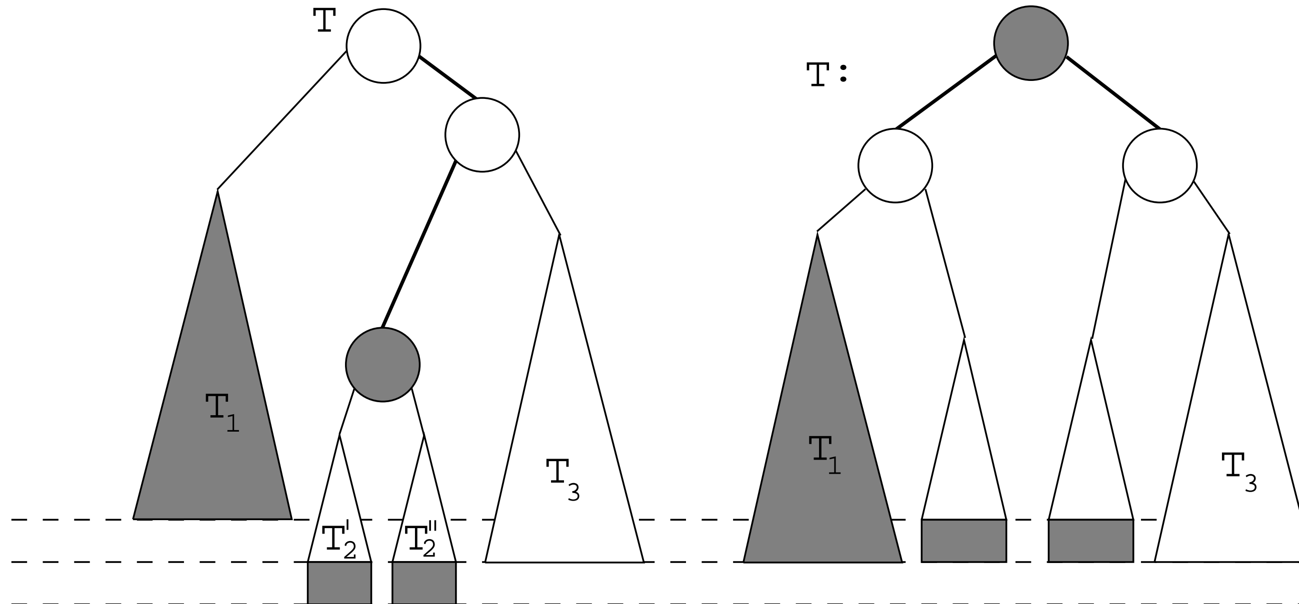


// Beobachte: Der zu tief hängende Teilbaum ist auf dem Weg „rechts-links“ zu erreichen.

// $\rightarrow$ Doppelrotation!

Fall RebDL-4.3: (Forts.)

Betrachte Teilbäume von $T_2 = \texttt{T.right.left}$.



Doppelrotation! $\quad \texttt{T} \leftarrow \textbf{rotateRL}(\texttt{T});$

$\texttt{shallower} \leftarrow$ *true*;

Neue Werte der Balancefaktoren:

Neue Werte der Balancefaktoren:

altes	neues		
`T.bal`	`T.left.bal`	`T.right.bal`	`T.bal`
-1	0	1	0
0	0	0	0
1	-1	0	0

(Das alte `T.bal` enthält (nach der Doppelrotation) den Balancefaktor, der ursprünglich in der Wurzel des „mittleren“ Unterbaums T_2 stand.)

Ende des nicht prüfungsrelevanten Lösch-Programms.

Achtung: Man muss Löschungen an Beispielen durchführen können!

Proposition 4.3.6

Die rekursive Prozedur `AVL_delete`(T, x) führt die Wörterbuchoperation *delete* korrekt durch. D. h.: es entsteht ein AVL-Baum für das Wörterbuch *delete*(f_T, x).

Die Prozedur hat Laufzeit $O(\log n)$ und führt **an jedem Knoten auf dem Weg** vom gelöschten Knoten zur Wurzel höchstens eine Einfach- oder Doppelrotation durch.

Satz 4.3.7

In **AVL-Bäumen** kostet jede **Wörterbuchoperation** Zeit

$$\boldsymbol{O(\log n)},$$

wenn n die aktuelle Anzahl der Einträge ist.

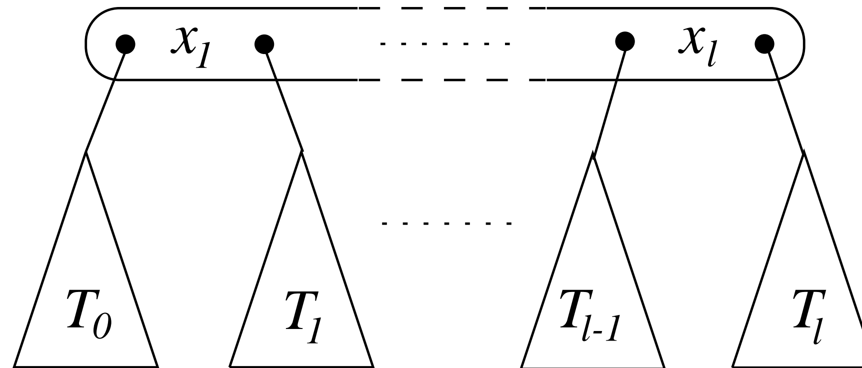
Vorlesungsvideo:

2-3-Bäume

4.4 Mehrweg-Suchbäume

Bäume aus Knoten mit variablem (Ausgangs-)Grad.

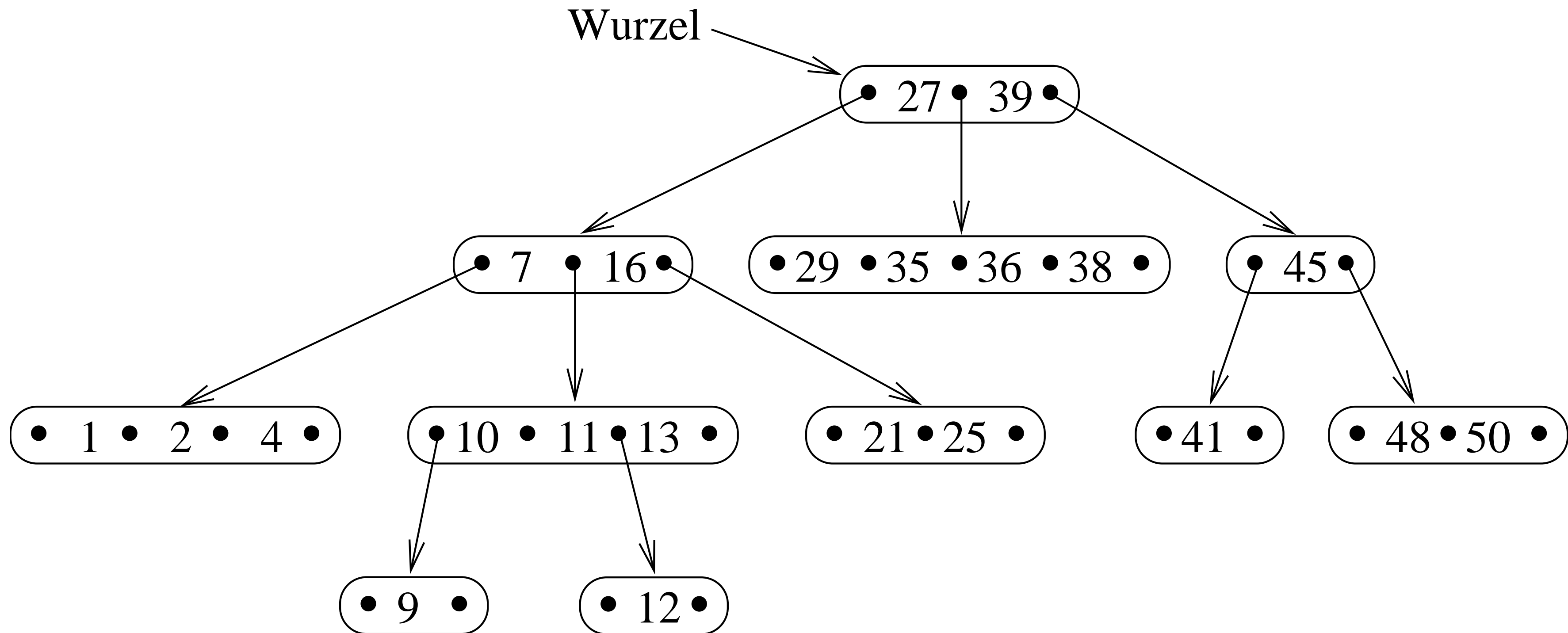
Ein Knoten mit $l \geq 1$ Schlüsseln und $l + 1 \geq 2$ Unterbäumen:



l Schlüssel: $x_1 < \cdots < x_l$. $l + 1$ Unterbäume: $T_0, \ldots, T_l$.

Für $\boldsymbol{y_i}$ in T_i, $0 \leq i \leq l$ gilt: $\boldsymbol{y_0} < x_1 < \boldsymbol{y_1} < x_2 < \cdots < \boldsymbol{y_{l-1}} < x_l < \boldsymbol{y_l}$

Beispiel eines $\mathbb{N}$-MwSB:



„•“ ohne Pfeil steht für einen Zeiger auf einen leeren Baum $\square$.

Man überprüfe die Anordnungsbedingung in diesem Beispiel!

Definition 4.4.1

Mehrweg-Suchbäume (MwSBe) über dem Universum $(U, <)$ sind wie folgt **induktiv definiert**:

(0) Der leere Baum $\square$ ist ein U-MwSB.

(1) Ist $l \geq 1$ und sind $x_1 < x_2 < \cdots < x_l$ Schlüssel in U und sind $T_0, T_1, \ldots, T_l$ U-MwSBe mit:

$$y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_{l-1} < x_l < y_l, \text{ für alle } y_i \text{ in } T_i,\ 0 \leq i \leq l,$$

dann ist auch $(T_0, x_1, T_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, T_{l-1}, x_l, T_l)$ ein U-Mehrweg-Suchbaum.

Analog: (U, R)-Mehrweg-Suchbäume, mit Menge R von Datensätzen.

Knotenformat ist dann: $(T_0, (x_1, r_1), T_1, (x_2, r_2), \ldots, (x_{l-1}, r_{l-1}), T_{l-1}, (x_l, r_l), T_l)$.

Rekursive **Suche** in einem Mehrwegsuchbaum T nach Schlüssel x aus U.

(Abstrakt, aber auch die Implementierungen arbeiten nach diesem Muster.)

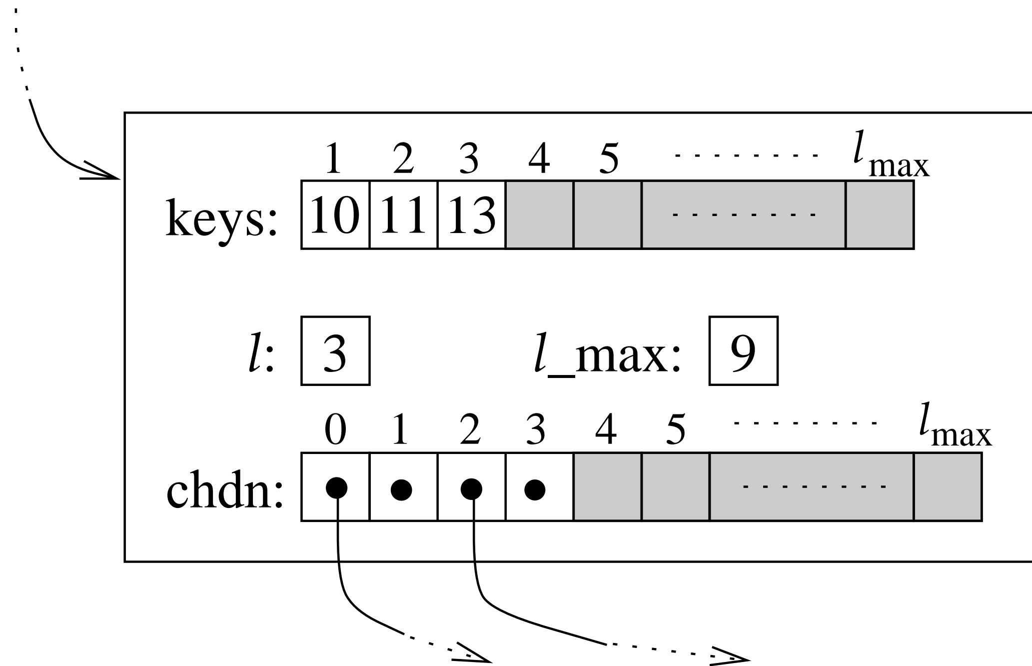
Wenn $T = \square$, dann gibt es keinen Eintrag mit Schlüssel x.

Wenn $T = (T_0, x_1, T_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, T_{l-1}, x_l, T_l)$, dann:

- Falls $x = x_i$ für ein i, dann sitzt Eintrag mit Schlüssel x im Wurzelknoten von T.
- Sonst: Bestimme das eindeutige i mit $x_i < x < x_{i+1}$ und suche rekursiv in T_i.
  (Dabei sollen x_0 und x_{n+1} die „virtuellen Schlüssel" $-\infty$ bzw. $+\infty$ sein.)

Implementierung der Knoten in einem Mehrwegsuchbaum:

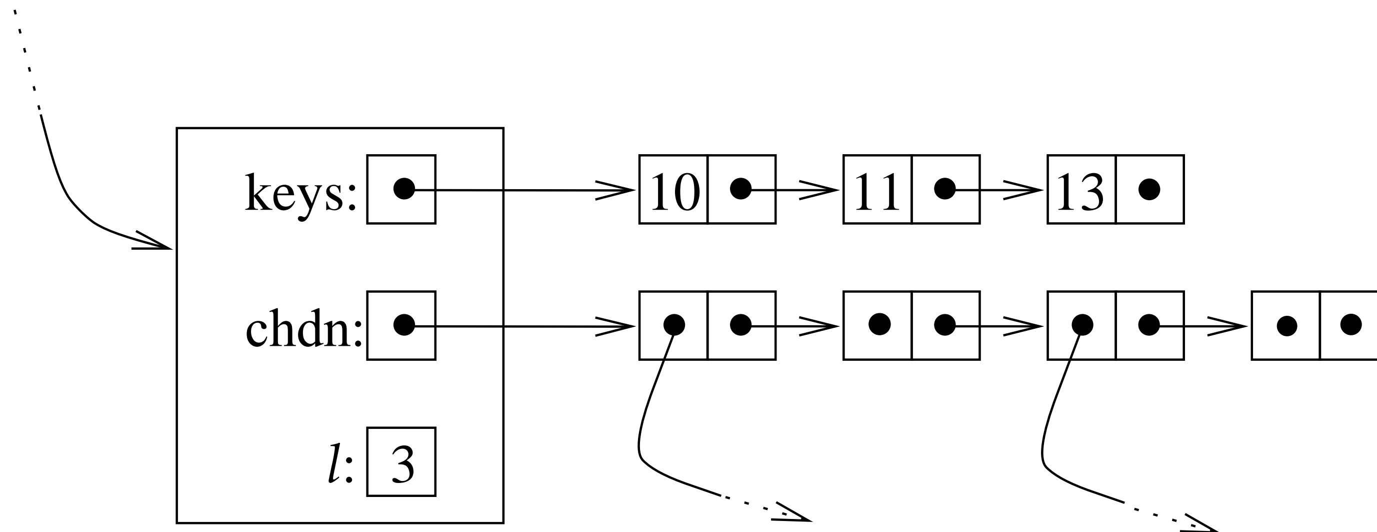
Variante 1: Jeder Knoten enthält zwei Arrays (oder „vectors"), *keys* und *chdn* (für „children"), bzw. noch ein Array *data* für die Daten zu den Schlüsseln.



Implementierung der Knoten in einem Mehrwegsuchbaum:

Variante 2: Schlüssel und Kinder als Listen *keys* und *chdn*.

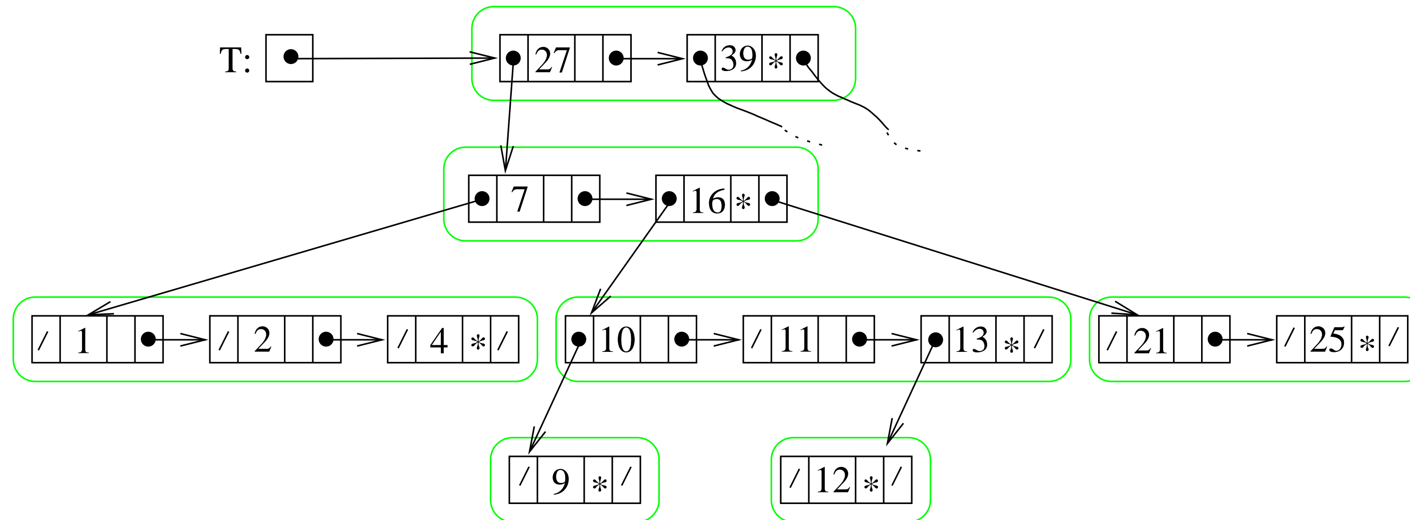
(Daten sind gegebenenfalls in die Schlüsselliste zu integrieren.)



Vorteil: Kein Platzverbrauch für nicht existierende Schlüssel/Unterbäume.

Implementierung der Knoten in einem Mehrwegsuchbaum:

Variante 3: Ein MwSB-Knoten wird durch eine aufsteigend sortierte lineare Liste von **Binärbaumknoten** dargestellt.



Jeder Knoten hat Platz für Schlüssel, (Daten,) Zeiger auf Unterbaum, Zeiger auf nächsten in Liste. Im Knoten muss als Boolescher Wert vermerkt sein, ob es sich um den Knoten am Listenende handelt. (Im Bild: „*“.) Ein solcher Knoten hat dann zwei Zeiger auf Unterbäume.

Elegant: Für die Suche kann man die gewöhnliche Suchprozedur für binäre Suchbäume benutzen.

Spezialfall: 2-3-Bäume

Definition 4.4.2

Ein Mehrweg-Suchbaum T heißt ein **2-3-Baum**, wenn gilt:

(a) Jeder Knoten enthält 1 oder 2 Schlüssel
(also hat jeder Knoten **2** oder **3** Unterbäume, was der Struktur den Namen gibt);

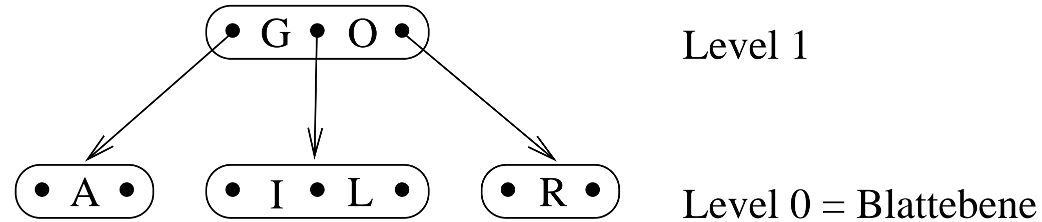
(b) Für jeden Knoten v in T gilt: Wenn v **einen** leeren Unterbaum hat, so sind **alle** Unterbäume unter v leer, d.h. v ist dann **Blatt**;

(c) Alle Blätter von T haben dieselbe Tiefe.

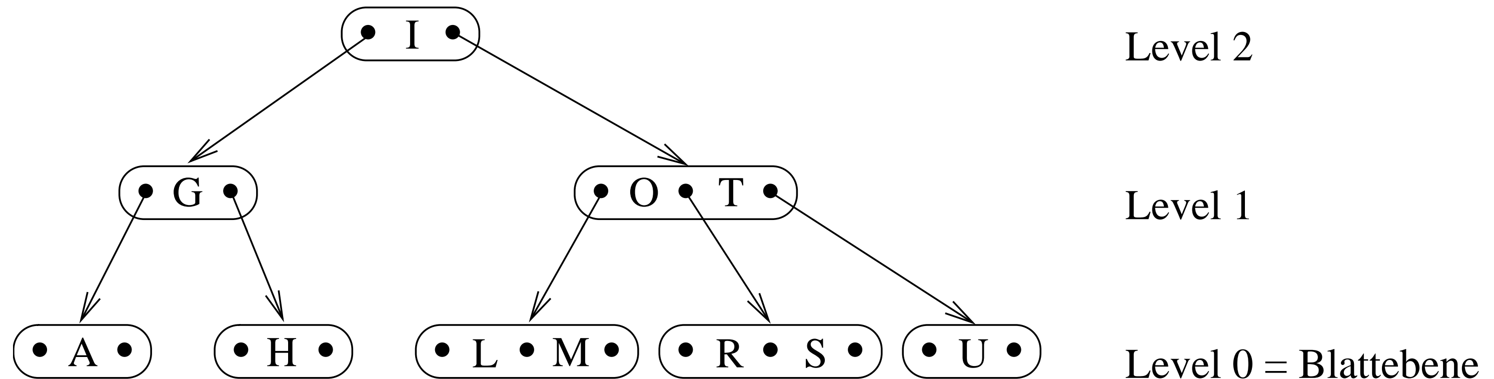
Beispiele:

Leerer 2-3-Baum: □

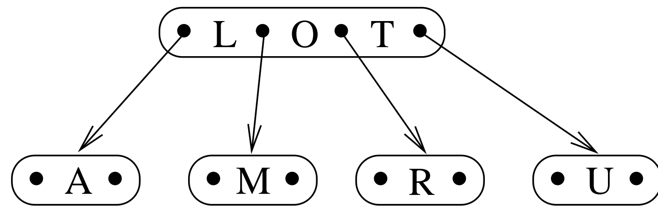
2-3-Baum mit zwei Ebenen:



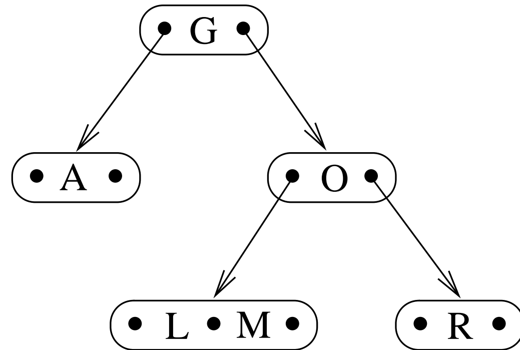
2-3-Baum mit drei Ebenen:



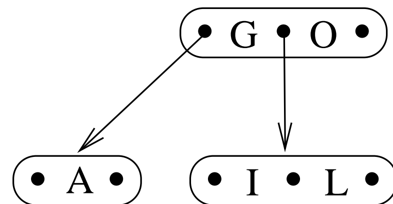
NB: Die Ebenen werden von den Blättern her nummeriert.



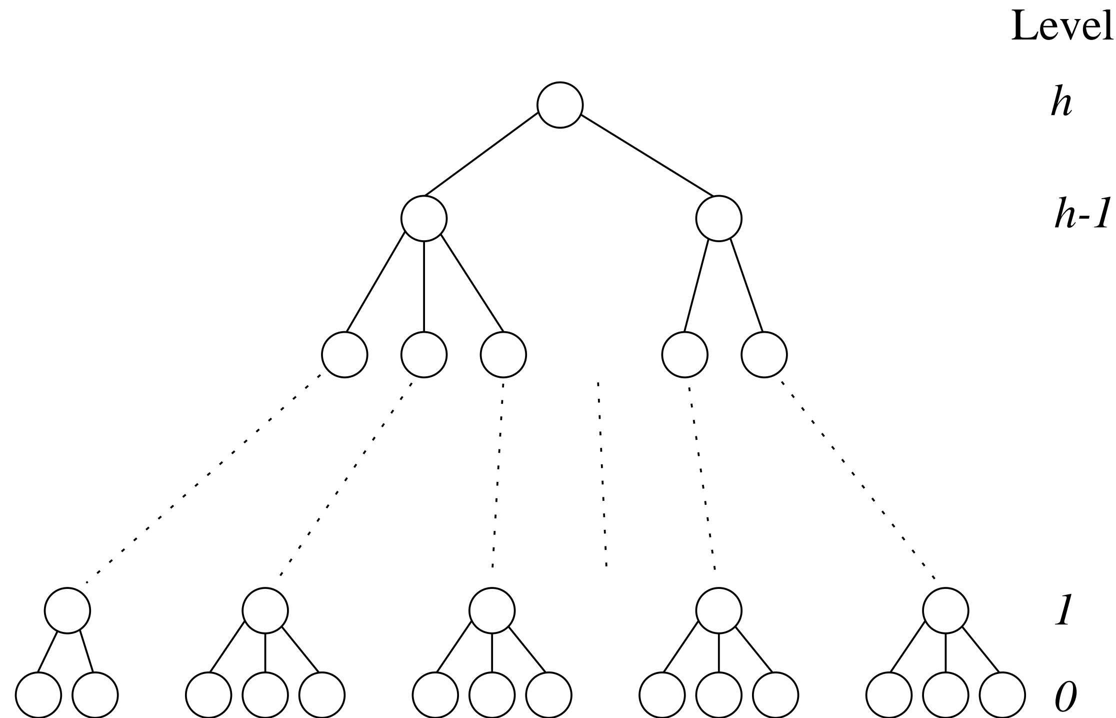
Kein 2-3-Baum (zu großer Grad).



Kein 2-3-Baum (Blätter in verschiedenen Tiefen).



Kein 2-3-Baum (Leerer Unterbaum in Nicht-Blatt).



Proposition 4.4.3

Die Tiefe eines 2-3-Baums mit n Einträgen ist mindestens $\lceil \log_3(n+1) \rceil - 1$ und höchstens $\lfloor \log_2(n+1) \rfloor - 1$. $[\log_3 x \approx 0.63 \log_2 x]$ *Beweis*: Übung.

Suche in 2-3-Bäumen

lookup(T, x), für 2-3-Baum T, $x \in U$.

1. Fall: $T = \square$. **return** „nicht vorhanden“.

2. Fall: $T = (T_0, x_1, T_1)$ oder $T = (T_0, x_1, T_1, x_2, T_2)$, evtl. mit Datensatz r_1 (und r_2).

Sequentielle Abarbeitung der folgenden Tests:

2a: $x < x_1$: **return lookup**(T_0, x).

2b: $x = x_1$: **return** „gefunden“ bzw. r_1.

2c: (x_2 existiert nicht $\vee$ $x < x_2$): **return lookup**(T_1, x).

2d: $x = x_2$: **return** „gefunden“ bzw. r_2.

2e: $x_2 < x$: **return lookup**(T_2, x).

Zeitaufwand: Wenn x im Knoten v_x sitzt: Für jeden Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu v_x entstehen Kosten $O(1)$. Erfolglose Suche endet auf Blattebene.

$\Rightarrow$ Zeit für Suche in 2-3-Bäumen mit n Einträgen ist $O(\log n)$.

Einfügen in 2-3-Bäumen

insert(T, x, r), für 2-3-Baum T, $x \in U$.

Resultat: Neuer Baum T', Boolescher Wert `higher` (gibt an, ob T' höher als T ist).

Invariante (I): (Diese werden wir benutzen und kontrollieren!)

T' höher als T $\Rightarrow$ T' hat in der Wurzel *nur einen* Schlüssel.

1. Fall: $T = \square$.

Erzeuge neuen 2-3-Baum-Knoten `T` mit Eintrag (x, r) und zwei leeren Unterbäumen.

return $(\mathtt{T}, \textit{true})$

(I) stimmt.

2. Fall: $T = (T_0, (x_1, r_1), T_1)$ oder $T = (T_0, (x_1, r_1), T_1, (x_2, r_2), T_2)$

2a: $x < x_1$: **insert**(T_0, x, r) liefert T_0' (an der Stelle von T_0) und `sub_higher`.
Dann: **Rebalancierung** (s. u.).

2b: $x = x_1$: Update: Ersetze r_1 durch r. **return** $(T,$ *false*$)$;

2c: $(x_2$ existiert nicht $\vee\ x < x_2)$: **insert**(T_1, x, r) liefert T_1' (an Stelle von T_1) und `sub_higher`.
Dann: **Rebalancierung** (s. u.).

2d: $x = x_2$: Update: Ersetze r_2 durch r. **return** $(T,$ *false*$)$;

2e: $x_2 < x$: **insert**(T_2, x, r) liefert T_2' (an Stelle von T_2) und `sub_higher`.
Dann: **Rebalancierung** (s. u.).

Rebalancierung

Fälle 2a/2c/2e:

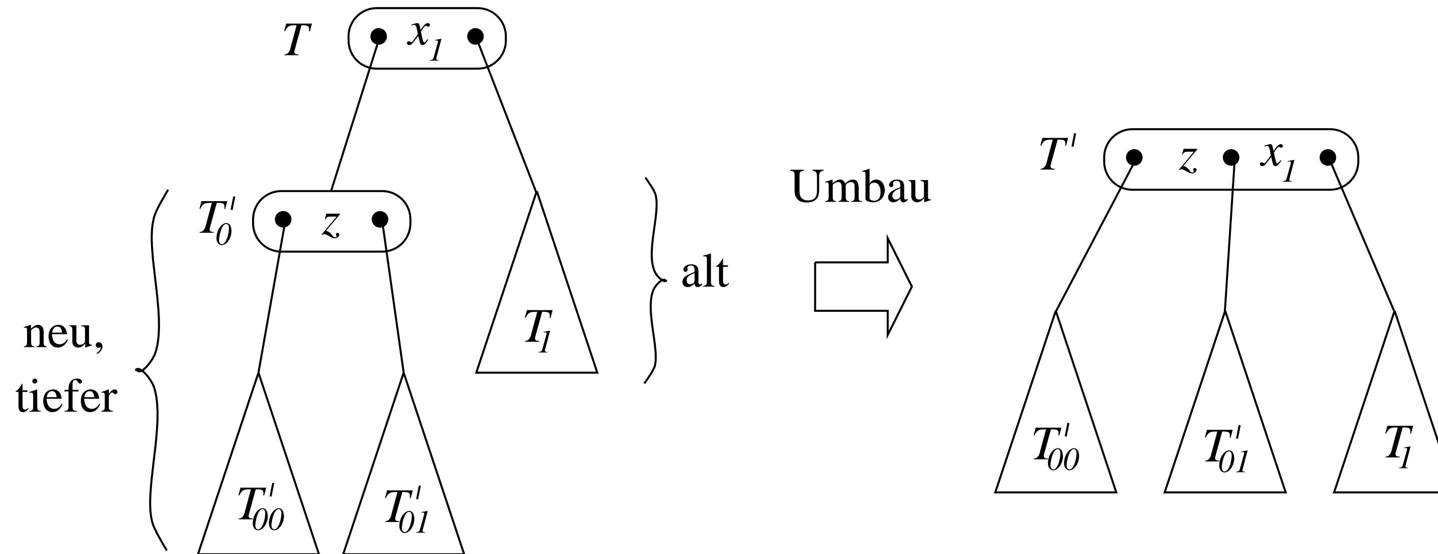
Fall 2a(i)/2c(i)/2e(i): `sub_higher` $=$ *false*.

// Der veränderte Teilbaum ist **nicht tiefer** geworden.

return$(T,$ *false*$)$.

Fall 2a(ii)/2c(ii): x_2 existiert nicht und `sub_higher` $=$ *true*

2a(ii): Benutze **(I)**!

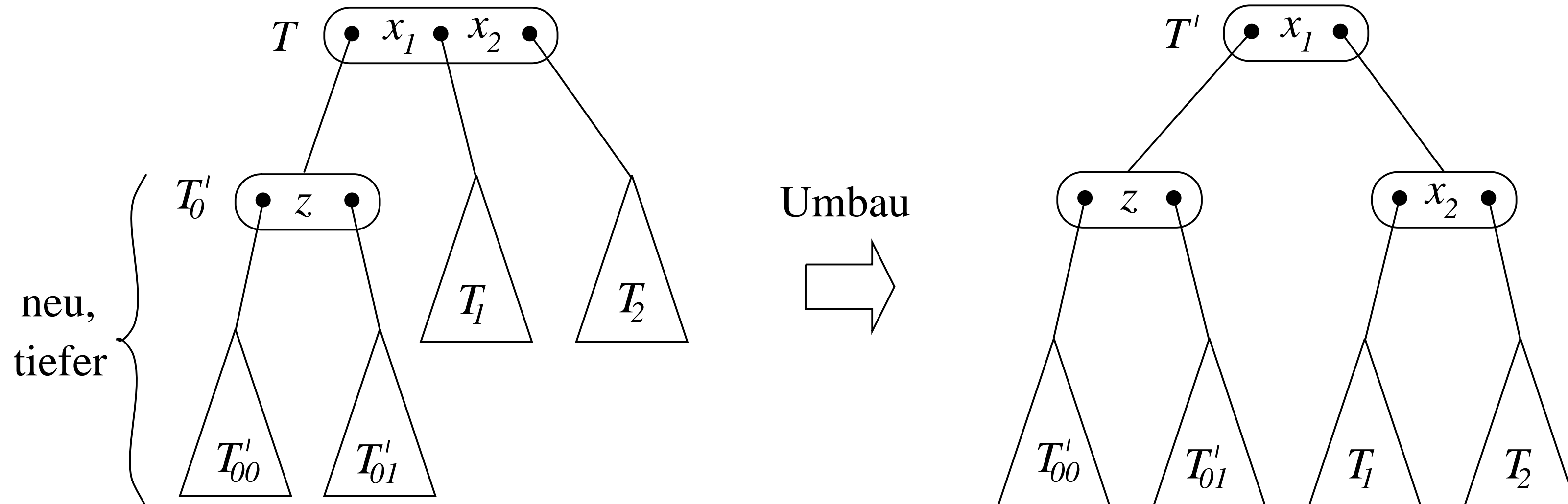


return$(T'$, *false*$)$.

2c(ii): analog. Fall 2a(iii)/2c(iii)/2e(iii): x_2 **existiert** und `sub_higher` $=$ *true*

Benutze jeweils **(I)**!

2a(iii):



return$(T'$, *true*).

Prüfe: **(I)** erfüllt.

2c(iii)/2e(iii): analog.

Beobachtung: Die Tiefe von 2-3-Bäumen wächst durch „Spalten der Wurzel“.

Proposition 4.4.4

(a) Die Prozedur **insert** ist korrekt, d. h. der Aufruf **insert**(T, x, r) liefert einen 2-3-Baum für *insert*(f_T, x, r).

(b) Das Einfügen eines Schlüssels in einen 2-3-Baum mit n Schlüsseln benötigt Zeit $O(\log n)$ und bewirkt die Erzeugung von höchstens $\log_2 n$ neuen Knoten.

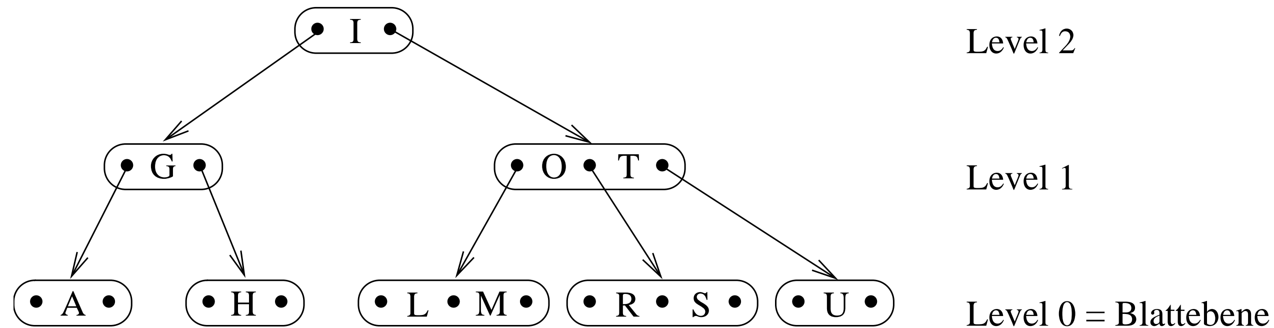
Beweis:

(a) Man kontrolliert in jedem Fall des Algorithmus nach, dass die 2-3-Baum-Struktur wiederhergestellt wird.

(b) Für die Bearbeitung **eines Levels** in der *insert*-Prozedur wird Zeit $O(1)$ benötigt.
Auf jedem der $\leq \log n$ Levels wird höchstens 1 Knoten neu gebildet.

Folgerung: Für jedes $n \geq 0$ existiert ein 2-3-Baum mit n Schlüsseln. (Man füge in einen anfangs leeren Baum die Schlüssel $1, \ldots, n$ ein.)

Löschen in 2-3-Bäumen

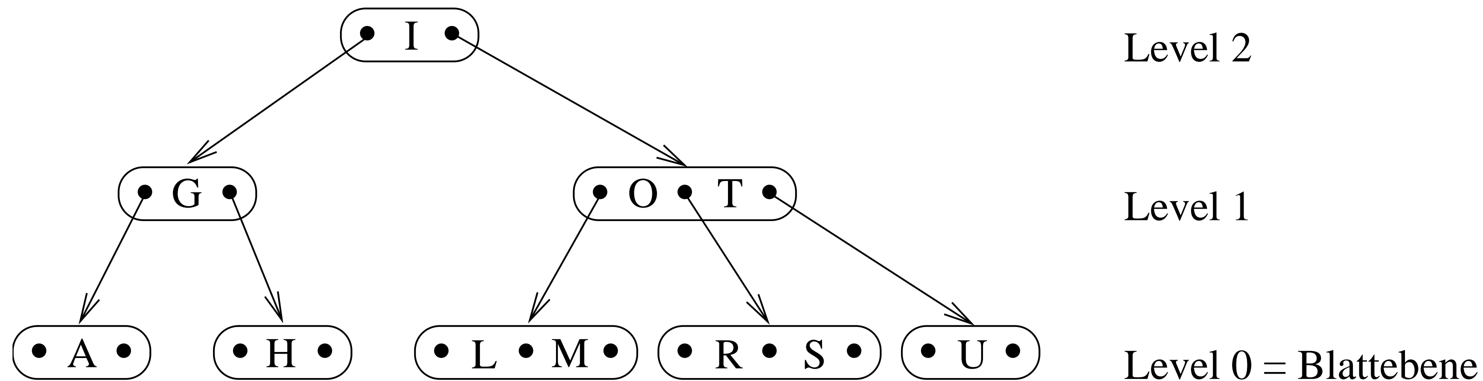


Prinzip: Suche kleinsten Schlüssel $y \geq x$, der in einem Blatt gespeichert ist. (x oder Inorder-Nachfolger von x.)

Setze y an die Stelle von x und entferne y.

Beispiele: U wird einfach gelöscht. Um I zu löschen: L in die Wurzel ziehen.

Daher: Nur Löschen eines Eintrags y in einem **Blatt** ist relevant.



• Einfacher Fall: Neben y hat das Blatt noch andere Einträge (Beispiel: M).

Keine Umstrukturierung nötig.

• Rebalancierungsfall: Durch das Streichen von y wird das Blatt leer, verliert also an Höhe (Beispiel: A).

Ähnlich wie bei den Einfügungen werden **flacher gewordene Teilbäume** durch lokale Umstellungen, von unten nach oben, wieder **auf die Höhe der anderen Teilbäume gebracht**. (Details weggelassen.)

2-3-4-Bäume

Definition Ein **2-3-4-Baum** ist ein **Mehrweg-Suchbaum** mit:

(a) Jeder Knoten hat 2, 3 oder 4 Kinder (1, 2 oder 3 Schlüssel)

(b) Für jeden Knoten v in T gilt: v hat **einen** leeren Unterbaum $\Rightarrow$ **alle** Unterbäume unter v sind leer, d. h. v ist **Blatt**;

(c) Alle Blätter von T haben dieselbe Tiefe.

Mitteilung Die Wörterbuchoperationen können auch mit 2-3-4-Bäumen so implementiert werden, dass sie **logarithmische Zeit** benötigen. Die Rebalancierung lässt sich alternativ „top-down" implementieren, auf dem Weg zur Einfügestelle bzw. Löschstelle, ohne Zurücklaufen.
Lit.: [D./Mehlhorn/Sanders]. (Dort: Einträge nur in Blättern.)

Man erhält den allgemeineren Begriff des **(a, b)-Baums**, wenn man in der obigen Definition „2, 3 oder 4 Kinder" durch „zwischen a und b Kindern, für $2 \leq a \leq (b+1)/2$ (Ausnahme: die Wurzel hat zwischen 2 und b Kinder)" ersetzt.

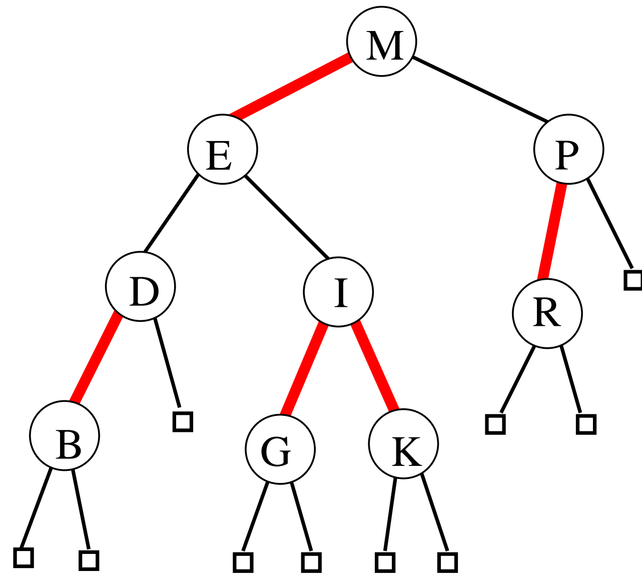
Vorlesungsvideo:

Rot-Schwarz-Bäume und B-Bäume

Rot-Schwarz-Bäume

Definition

Ein **(linksgeneigter)** **Rot-Schwarz-Baum** ist ein **binärer Suchbaum** mit:



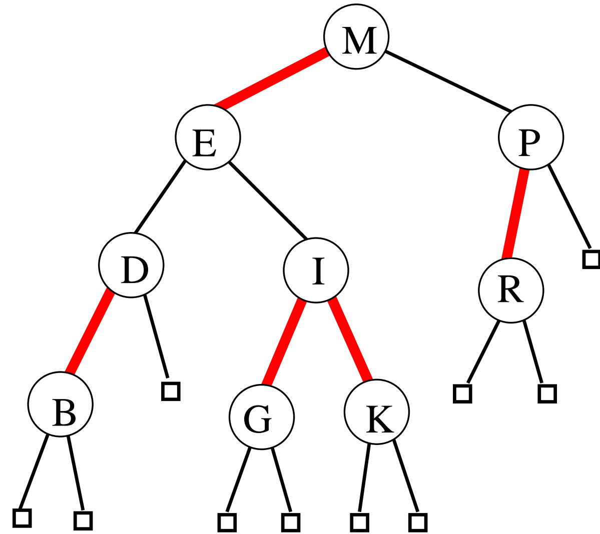
(a) Jede Kante hat eine Farbe **rot** oder **schwarz** (1 Flagbit!).

(b) Kanten zu (leeren, externen!) Blättern sind **schwarz**.

(c) Auf keinem Weg folgen zwei rote Kanten aufeinander.

(d) Wenn ein Knoten nur eine rote Ausgangskante hat, so führt diese zum linken Kind.

(e) Auf jedem Weg von der Wurzel zu einem Blatt liegen gleich viele schwarze Kanten.



Schwarz-Tiefe: 2.

Die **Schwarz-Tiefe** $b(v)$ eines Knotens v ist die Anzahl der schwarzen Kanten auf einem Weg von v zu einem Blatt.

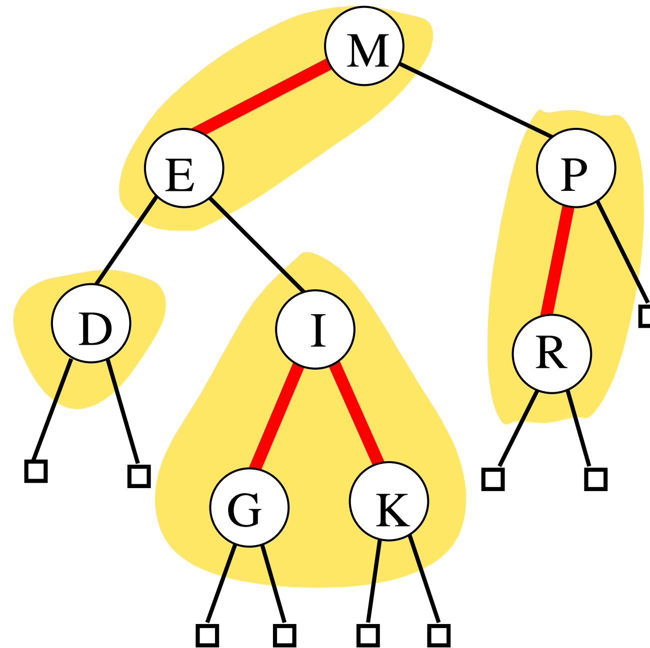
Die **Schwarz-Tiefe** $b(T)$ des Rot-Schwarz-Baums T ist die Schwarz-Tiefe des Wurzelknotens von T.

Mitteilung

Die Wörterbuchoperationen können auch mit Rot-Schwarz-Bäumen so implementiert werden, dass sie **logarithmische Zeit** benötigen. Weiterführende Operationen (wie das Spalten von Bäumen oder die Vereinigung von Bäumen) lassen sich mit Rot-Schwarz-Bäumen gut implementieren.
Lit.: [Cormen, Leiserson, Rivest, Stein] und [Sedgewick].

Wenn man einen schwarzen Knoten mit seinen roten Kindern (0, 1 oder 2) zu einem „Super-Knoten“ zusammenfasst, erhält man einen 2-3-4-Baum.

D. h.: Rot-Schwarz-Bäume sind spezielle Darstellungen von 2-3-4-Bäumen, die nur Binärbaumknoten benutzen.



B-Bäume

Ein **B-Baum** zum **Parameter $t \geq 2$** ist ein $(t, 2t)$-Baum, also ein **Mehrweg-Suchbaum** mit:

(a) Jeder Knoten hat maximal $2t$ Kinder ($\leq 2t - 1$ Schlüssel);
(b) Jeder Knoten außer der Wurzel hat mindestens t Kinder ($\geq t - 1$ Schlüssel);
die Wurzel hat mindestens 2 Kinder (≥ 1 Schlüssel);
(c) v hat **einen** leeren Unterbaum $\Rightarrow$ v ist **Blatt**;
(d) Alle Blätter von T haben dieselbe Tiefe.

Mitteilung Die Tiefe eines B-Baums mit Parameter t für n Einträge ist $\Theta(\log_t n) = \Theta((\log n)/(\log t))$, genauer mindestens $(\log n)/\log(2t) - 1$, höchstens $(\log n)/\log t$.

Beispiel: Die Tiefe eines B-Baums zu $t = 32$ ist höchstens $(\log n)/5$.

Jede Wörterbuchoperation betrifft höchstens zwei Knoten auf jedem Level, also höchstens $2(\log n)/\log t$ viele.
B-Bäume werden für die Implementierung von Wörterbüchern auf externen Speichermedien (Festplatte, SSD) benutzt, die eine höhere Latenzzeit haben und Lesen in größeren Blöcken erlauben. Details: Vorlesungen zu Datenbanktechniken.